

Waves

G Falkovich 2021

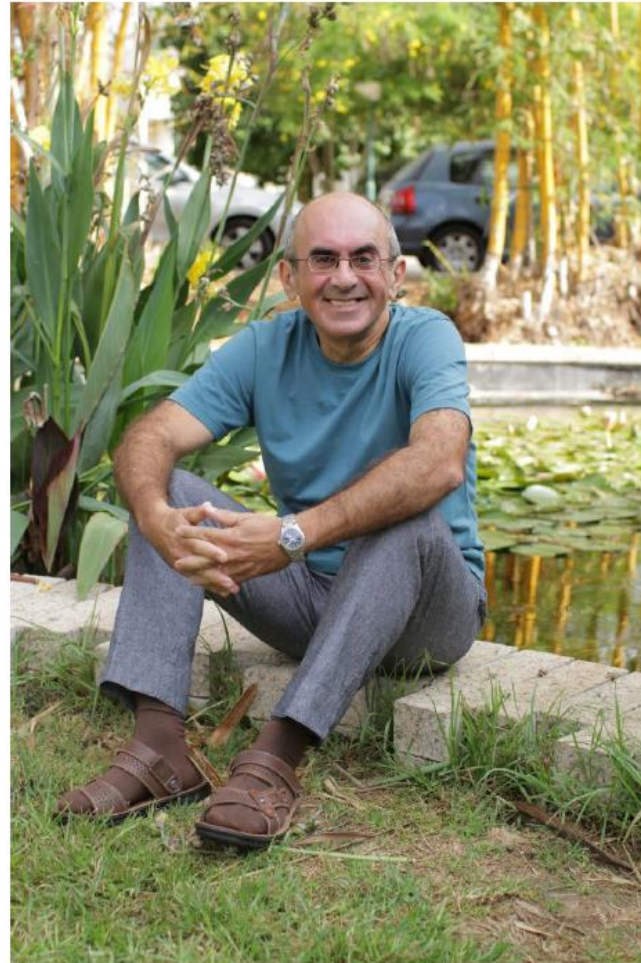
<https://shop.rcd.ru/catalog/matematika-i-mehanika1/19024/>

<https://www.cambridge.org/core/books/fluid-mechanics/ADCDB15D96517FF93F8D894997174B3E>



Gregory Falkovich

- **Home**
- Research highlights
- Books and reviews
- Research papers
- Talks/Interviews
- Courses
- Conferences/Programs
- Group/Collaborators
- Photo Gallery
- Fluid mechanics
- Contact Us



gregory.falkovich@weizmann.ac.il

[CV \(PDF\)](#)

[YouTube Channel](#)

Prof. Gregory Falkovich

Pollak Professorial Chair
in Physics

Weizmann Institute of
Science
Rehovot 76100, ISRAEL
Weissman Building,
Room 262

Tel: +972-8-934-2830

Fax: +972-8-934-4109

[Lecture Notes on Information](#), [Video](#)

[Видео "Жили-были ученые..."](#)

[Archive author identifier](#)

Экзамен -экспериментальная работа на выбор.

Описание может включать видео, фотографии, скетчи, формулы – на ваше усмотрение. Опишите наблюдаемые явления и попробуйте объяснить их.

1. Найдите водоем не меньше 4-5 метров в диаметре. Дождитесь безветренной погоды, чтобы поверхность воды была спокойной. Бросьте в воду небольшой камешек (меньше 3 см). Опишите и объясните, что происходит с поверхностью воды со временем.
2. Найдите раковину с краном и плоским дном. Откройте кран сначала со слабой струей, потом все сильнее и сильнее. Опишите, что происходит со струей и что происходит с водой, растекающейся по дну раковины.

Удачи!

Почему мы часто видим периодические волны на воде и так редко слышим чистую ноту?



Почему они набегают на берег параллельно ему, даже если ветер дует наискосок?



Почему волны на воде часто неодинаковые и не прямые?



**Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые;
иначе такое бросание будет пустой забавою.**



Почему короткие и длинные волны
бегут вместе?



Как устроен след от корабля?



Почему одни волны большие,
а другие очень большие?



Почему одни волны большие,
а другие очень большие?



Страничка для филологов.

Поэты о волнах и волнении

Дума за думой, волна за волной –
Два проявленья стихии одной:
В сердце ли тесном, в безбрежном ли море,
Здесь – в заключении, там – на просторе –
Тот же всё вечный прибой и отбой,
Тот же всё призрак тревожно-пустой.

Федор Тютчев

[Бежит волна-волной, волне хребет ломая,](#)
Кидаясь на луну в невольничьей тоске,
И янычарская пучина молодая,
Неусыпленная столица волновая,
Кривеет, мечется и роет ров в песке...

Осип Мандельштам

... Там, в стороне от нас, от мира в стороне
Волна идет вослед волне о берег биться,
А на волне звезда, и человек, и птица,
И явь, и сны, и смерть - волна вослед волне.

Арсений Тарковский

Волнение чернеющей листвы,
Волненье душ и невское волненье,
И запах загнивающей травы
И облаков белесое гоненье,
И странная вечерняя тоска,
Живущая и замкнуто и немо,
И ровное дыхание стиха,
Нежданно посетившее поэму...

И Бродский

Английский

Wave – волна, махать.

Французский

Vague – волна, неясность.

Иврит

לָג – волна, куча.

Украинский

Хвиля – волна, хвилинка – минута.

...That wave's been standing off this jut of shore --'
The black stream, catching a sunken rock,
Flung backward on itself in one white wave,
And the white water rode the black forever...

Speaking of contraries, see how the brook
In that white wave runs counter to itself.

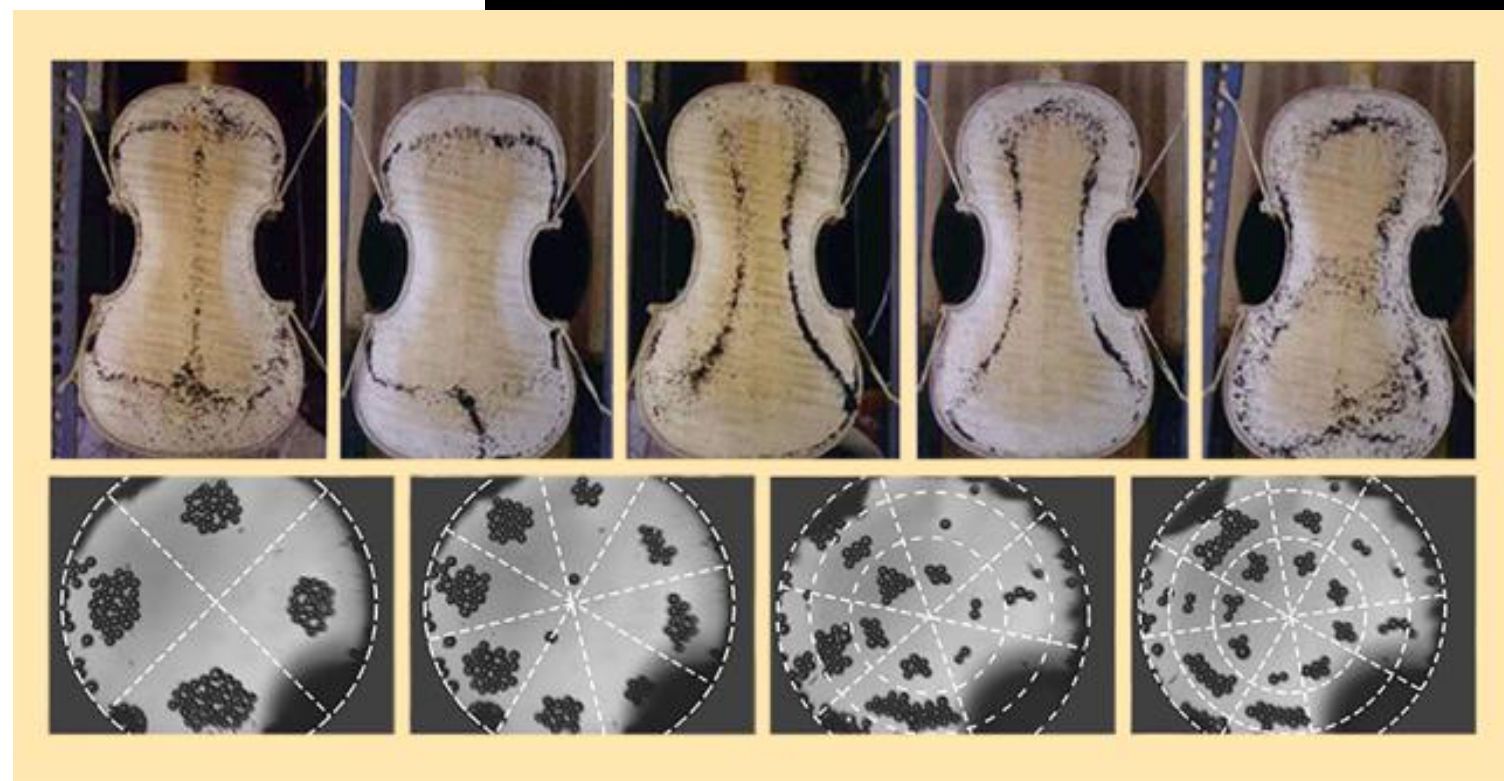
It is from that in water we were from
Long, long before we were from any creature...
It is this backward motion toward the source,
Against the stream,
that most we see ourselves in,
The tribute of the current to the source.

Robert Frost





Кстати, зачем нам два уха?
А два глаза?



Звук

Как угадать закон распространения?

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr - i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук – это возмущение плотности.

А сила – это давление.

$$\omega = k^a P^b \rho^c$$

$$\text{сек}^{-1} = \text{см}^a (\text{г/см} \cdot \text{сек})^b (\text{г/см}^3)^c$$

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук — это возмущение плотности.

А сила — это давление.

$$\omega = k \sqrt{P/\rho}$$

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук — это возмущение плотности.

А сила — это давление.

$$\omega = k \sqrt{\partial P / \partial \rho} = ck.$$

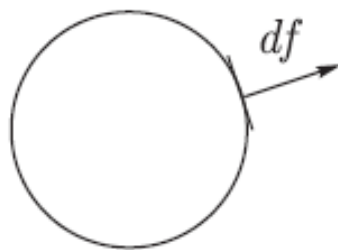
Как видно, c действительно является скоростью звука. Осталось установить, какую производную $\partial p / \partial \rho$ использовать, изотермическую или адиабатическую. Эти производные различаются весьма значительно, например, для газа изотермическая производная дает $c^2 = P / \rho$, тогда как закон адиабаты $P \propto \rho^\gamma$ дает:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (2.24)$$

Адиабатическое уравнение состояния следует использовать, когда можно пренебречь теплообменом между теплыми областями сжатия и холодными областями расширения. Для этого необходимо, чтобы теплопроводность (которую можно оценить как произведение тепловой скорости на длину свободного пробега) была меньше, чем произведение скорости звука на длину волны. Поскольку скорость звука порядка тепловой скорости, получается требование, чтобы длина волны была много больше длины свободного пробега, что всегда выполняется. Таким образом, звук всегда следует рассматривать адиабатически. Ньютон уже знал, что $c^2 = \partial p / \partial \rho$. Экспериментальные данные Бойля показывали $p \propto \rho$ (т. е. были изотермическими), что давало для воздуха значение $c^2 = p / \rho \simeq 290$ м/с, заметно отличающееся от измеренного 340 м/с при 20 °С. Только через сто лет Лаплас получил правильное (адиабатическое) значение, используя $\gamma = 7/5$.

Динамика сплошной среды: уравнения Эйлера и непрерывности

Уравнение Эйлера. В отсутствие трения сила, действующая на любой объем, равна интегралу от давления по поверхности: $-\oint p d\mathbf{f}$. Элемент поверхности $d\mathbf{f}$ — это вектор, направленный по нормали наружу.



Используя формулу Стокса, преобразуем поверхностный интеграл в объемный: $-\oint p d\mathbf{f} = -\int \nabla p dV$. Таким образом, сила, действующая на единицу объема, равна $-\nabla p$. Было бы ошибкой, однако, приравнять эту силу к производной по времени от импульса жидкости в этом объеме. Чтобы написать второй закон Ньютона, мы должны выделить жидкую частицу, т. е. малую часть жидкости с фиксированной массой (которую будем полагать равной единице). Тогда сила, действующая на единичную массу, $\nabla p / \rho$, должна быть равна ускорению частицы $d\mathbf{v}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Как вычислить ускорение частицы жидкости, если известно поле скорости как функция координат и времени $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$?

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \stackrel{?}{=} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

За время dt скорость частицы изменится на $d\mathbf{v}$, которая состоит из двух частей, временной и пространственной:

$$d\mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Это изменение в данной точке плюс разница между двумя точками, раздвинутыми на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, на которое сдвинулась частица за время dt . Разделив (1.1) на dt , получим так называемую материальную производную как локальную производную плюс перенос:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

1.1.4. Изэнтропическое течение

Простейшие течения соответствуют постоянной s и описываются существенно упрощенным уравнением Эйлера вследствие возможности представить $\nabla p/\rho$ как градиент. Для такого представления нам нужен термодинамический потенциал, который зависит от p, s , так что при постоянном s его дифференциал выражается только через dp . Такой потенциал называется *энтальпией* и выражается через внутреннюю энергию единичной массы жидкости E по формуле $W = E + pV$. Из всей термодинамики для нас достаточно одного соотношения $dE = Tds - pdV$, так что $dW = Tds + Vdp$ и $W = \partial(E\rho)/\partial\rho$. Поскольку энтропия не меняется ни в пространстве, ни во времени для изэнтропического течения и $V = \rho^{-1}$ для единичной массы, то $dW = dp/\rho$ и мы получаем в отсутствие внешних сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla W. \quad (1.10)$$

Малые возмущения плотности распространяются как звуковые волны, которые в идеальной жидкости описываются уравнениями непрерывности и Эйлера, линеаризованными относительно возмущений $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.22)$$

Как связать вариации давления и плотности?

$$p' = c^2 \rho'.$$

Если амплитуда колебаний a мала по сравнению с масштабом изменения скорости l , то $\partial v / \partial t \sim v^2 / a$, в то время как $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \sim v^2 / l$, так что можно пренебречь нелинейным членом и $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla W$. Взяв ротор от этого соотношения, получим сохранение $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, среднее от которого должно отсутствовать для осцилляторного движения, так что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ и

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

только $v_x = \partial \phi / \partial x$ отлична от нуля

звуковые волны в жидкостях и газах являются продольными. Любое локализованное одномерное возмущение (плотности, давления или скорости вдоль x) распадается на два одномерных волновых пакета, движущихся в противоположных направлениях без изменения формы. В каждом из волновых пакетов $\partial / \partial t = \pm c \partial / \partial x$, так что второе уравнение (2.22) дает $v = p' / \rho c = c \rho' / \rho$. Амплитуда волны мала, когда $\rho' \ll \rho$, что требует $v \ll c$.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.22)$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

только $v_x = \partial \phi / \partial x$ отлична от нуля

Для сферически симметричного случая в d измерениях уравнение

$$\phi_{tt} = \frac{c^2}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.26)$$

принимает вид $h_{tt} = c^2 \partial^2 h / \partial r^2$ после подстановки $\phi = h / r^a$ только для $d = 1, a = 0$ и $d = 3, a = 1$. Вследствие этого удастся сразу же написать общее решение уравнения (2.26) также и в трехмерном случае:

$$\phi(r, t) = r^{-1} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]. \quad (2.27)$$

В одномерном случае

$$\varphi = f(t - r/c)$$

В трехмерном случае

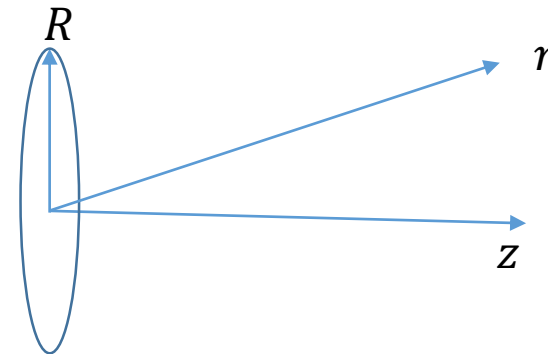
$$\varphi = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

В одномерном случае $\varphi = f(t - r/c)$

В трехмерном случае $\varphi = \frac{f(t - r/c)}{r}$

В двумерном (цилиндрическом) случае $r^2 = z^2 + R^2, dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$

$$\varphi(R, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} dz = \int_R^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}}$$



В одномерном случае $\varphi = f(t - r/c)$

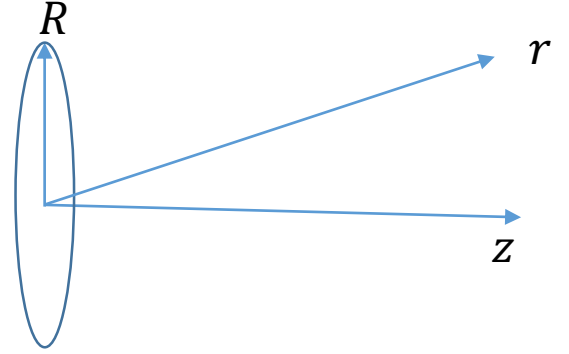
В трехмерном случае $\varphi = \frac{f(t - r/c)}{r}$

В двумерном (цилиндрическом) случае $r^2 = z^2 + R^2, dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$

$$\varphi(R, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} dz = \int_R^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}}$$

Пусть $f(\tau)$ отлична от нуля при $0 < \tau < T$. Тогда при $t \gg T + R/c$

$$\varphi(R, t) = \int_0^T \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}} \approx \frac{1}{ct} \int_0^T f(\tau) d\tau$$

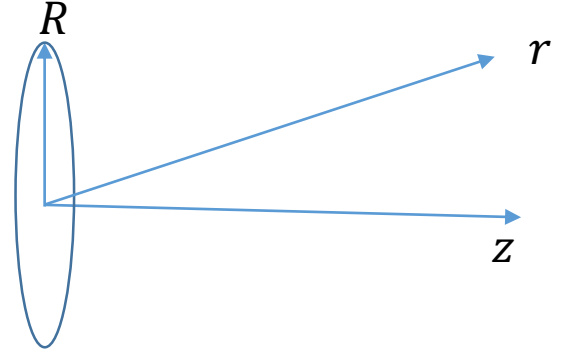


В одномерном случае $\varphi = f(t - r/c)$

В трехмерном случае $\varphi = \frac{f(t - r/c)}{r}$

В двумерном (цилиндрическом) случае $r^2 = z^2 + R^2, dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$

$$\varphi(R, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} dz = \int_R^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{r} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}}$$



Пусть $f(\tau)$ отлична от нуля при $0 < \tau < T$. Тогда при $t \gg T + R/c$

$$\varphi(R, t) = \int_0^T \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}} \approx \frac{1}{ct} \int_0^T f(\tau) d\tau$$

При сколь угодно большом t , потенциал отличен от нуля и убывает по степенному закону.

Для домашнего рассмотрения
Бум! в d -мерном пространстве.

Обозначим $t = i x_{d+1}/c$

$$\left(-\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \right) \varphi = f(\mathbf{x}_d) g(t)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} \right) \varphi = \Delta_{d+1} \varphi = h(\mathbf{x}_{d+1})$$

Чтобы получить пространственную плотность энергии звука E_w , разложим $\rho E + \rho v^2/2$ до членов второго порядка по возмущениям. Постоянный член $\rho_0 E_0$ не имеет отношения к волне. Также следует опустить член первого порядка $\rho' \partial(\rho E)/\partial \rho = w_0 \rho'$, который просто связан с перераспределением массы и исчезает после интегрирования по объему. Остаются квадратичные члены

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}.$$

Плотность потока энергии с той же точностью есть

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (w + v^2/2) \approx \rho \mathbf{v} w = w' \rho_0 \mathbf{v} + w_0 \rho' \mathbf{v}.$$

Опять мы опустим $w_0 \rho' \mathbf{v}$, соответствующий $w_0 \rho'$ в энергии и исчезающий после интегрирования по объему. Изменение энтальпии есть $w' = p'(\partial w/\partial p)_s = p'/\rho \approx p'/\rho_0$, и мы получаем

$$\mathbf{q} = p' \mathbf{v}.$$

Плотность потока энергии – это мощность, падающая на единицу площади.

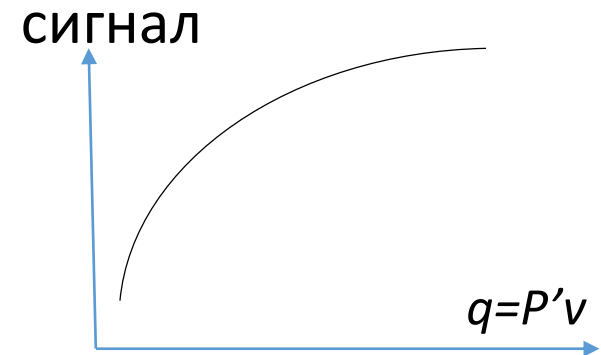
Откуда децибелы?

$$q(\text{dB}) = 120 + 10 \log_{10} q \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Чтобы меньше пугаться рева близкого медведя и лучше слышать журчание далекого ручья, наше ухо усиливает тихие и подавляет громкие звуки.

В результате, в мозг посылается сигнал, пропорциональный логарифму интенсивности.

Нормальный разговор 50-60 децибел, рок-концерт 100.



Плотность импульса есть

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2.$$

Акустическое возмущение в конечном объеме, не ограниченном стенками, имеет ненулевой импульс

$$\int \mathbf{j} dV = \rho_0 \int \nabla \phi dV + \int \mathbf{q} dV / c^2 = \int \mathbf{q} dV / c^2$$

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение – как его решить?

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение – как его решить?

В задаче **три** параметра u, k, ω и **две** размерности, см и сек, так что можно составить один безразмерный параметр $\frac{uk}{\omega}$. Его смысл отношение скорости жидкости к скорости проходящей через нее волны. Если это отношение мало, каждая частица жидкости не успевает сильно сместиться за период волны, и это малое смещение можно описать итерациями: в нулевом приближении считать частицу неподвижной и брать скорость в этой точке для вычисления смещения в первом приближении, и т. д.

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Решая итерациями $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t) + \dots$, получим $\dot{X}_1 = u \sin(kX_0 - \omega t)$, что дает

$$X_1(t) = \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t),$$

$$X_2(t) = \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t).$$

Что мы видим?

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение, которое можно решить итерациями $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t) + \dots$,

$$X_1(t) = \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t),$$

$$X_2(t) = \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t).$$

Видим, что в первом порядке по амплитуде волны возмущение распространяется, а во втором сама жидкость течет со скоростью $ku^2/2\omega = u^2/2c$ в направлении распространения волны. Причина в том, что частицы жидкости движутся вместе с волной чуть дальше, чем против нее.

Заметим, что в одномерном случае ненулевой импульс вовсе не означает среднего переноса жидкости. Частицы жидкости обмениваются импульсом, который поэтому может передаваться без переноса массы. Например, можно сгенерировать волновой пакет, подвигав туда-сюда поршень в трубе, что не произведет никакого среднего течения. В этом случае каждая частица жидкости осциллирует в волне, а затем возвращается в исходное положение после прохождения пакета. Следовательно, среднее по времени от потока массы равно нулю в каждой точке: $\overline{\rho v} = \rho_0 \bar{v} + \overline{\rho' v} = 0$. Это требует среднего противотока $\bar{v} = -\overline{\rho' v} / \rho_0 = -\overline{v^2} / c = -u^2 / 2c$, в точности компенсирующего лагранжев дрейф (2.30), полученный в отсутствие средней эйлеровой скорости.

Конус Маха

бум! в движущейся среде

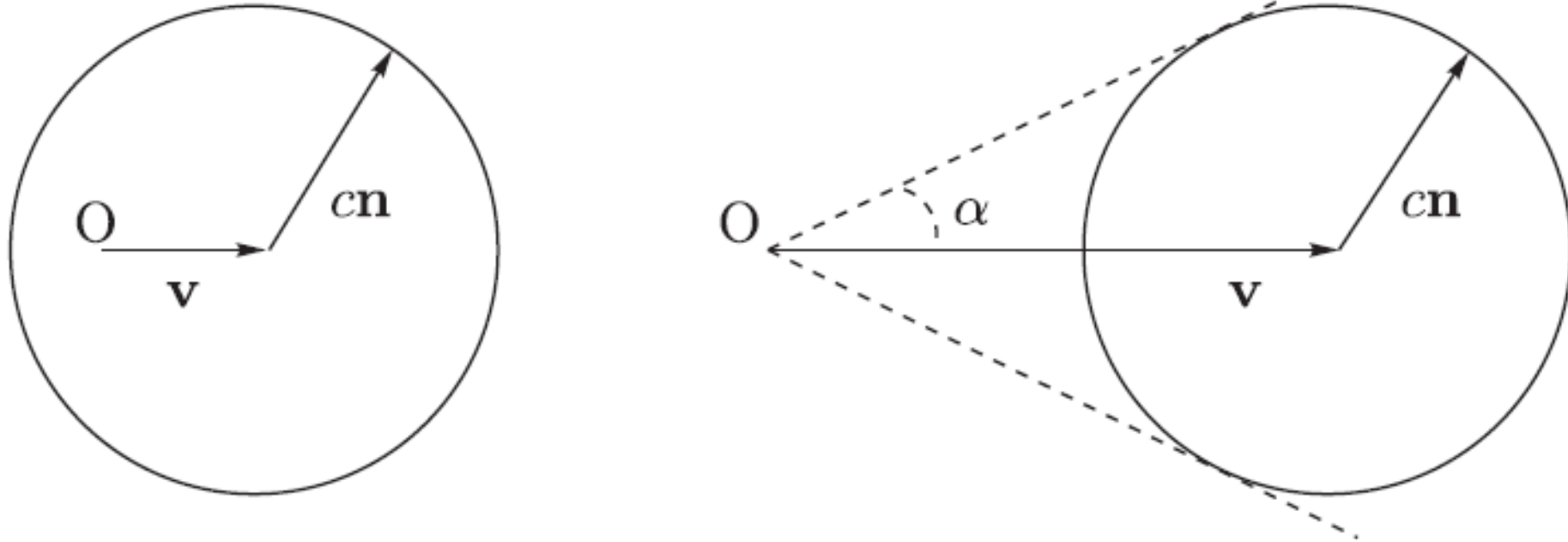


Рис. 2.14. Распространение возмущения из точки O в среде, движущейся с дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скоростями v . Никакое возмущение не может выйти за пределы конуса Маха, обозначенного пунктиром.

бум, бум, бум...

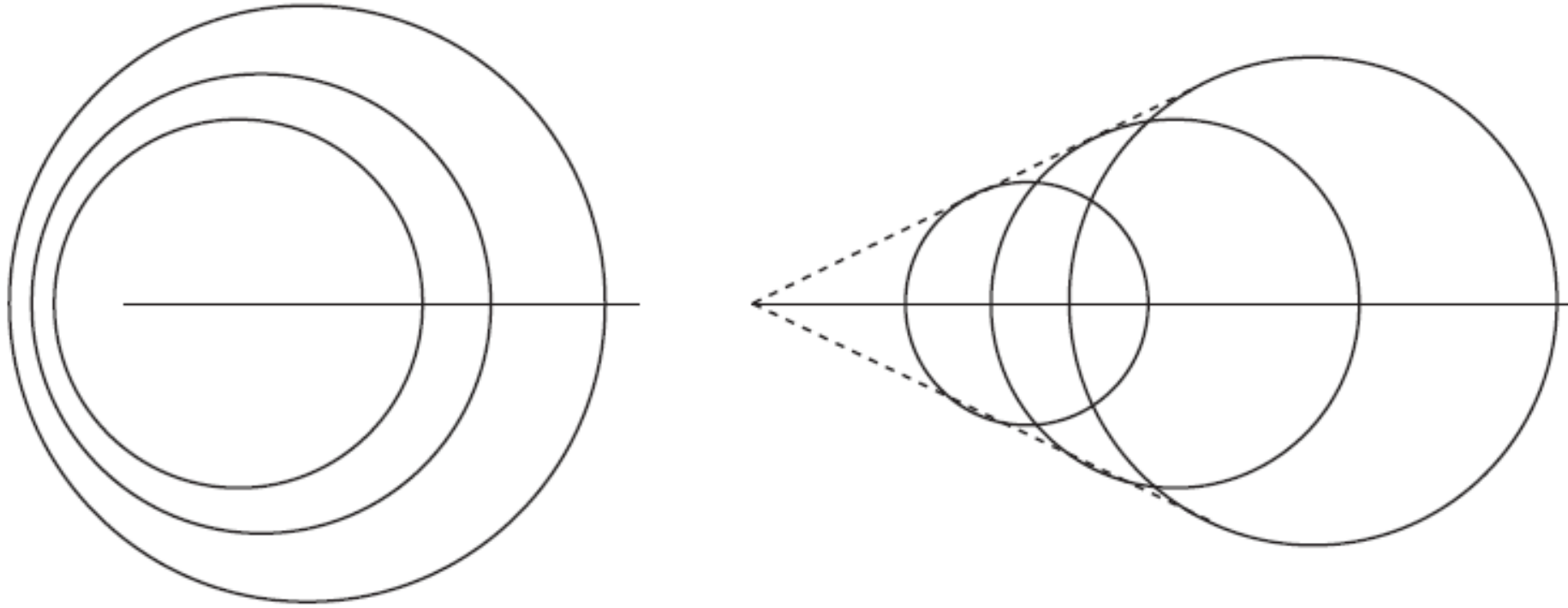
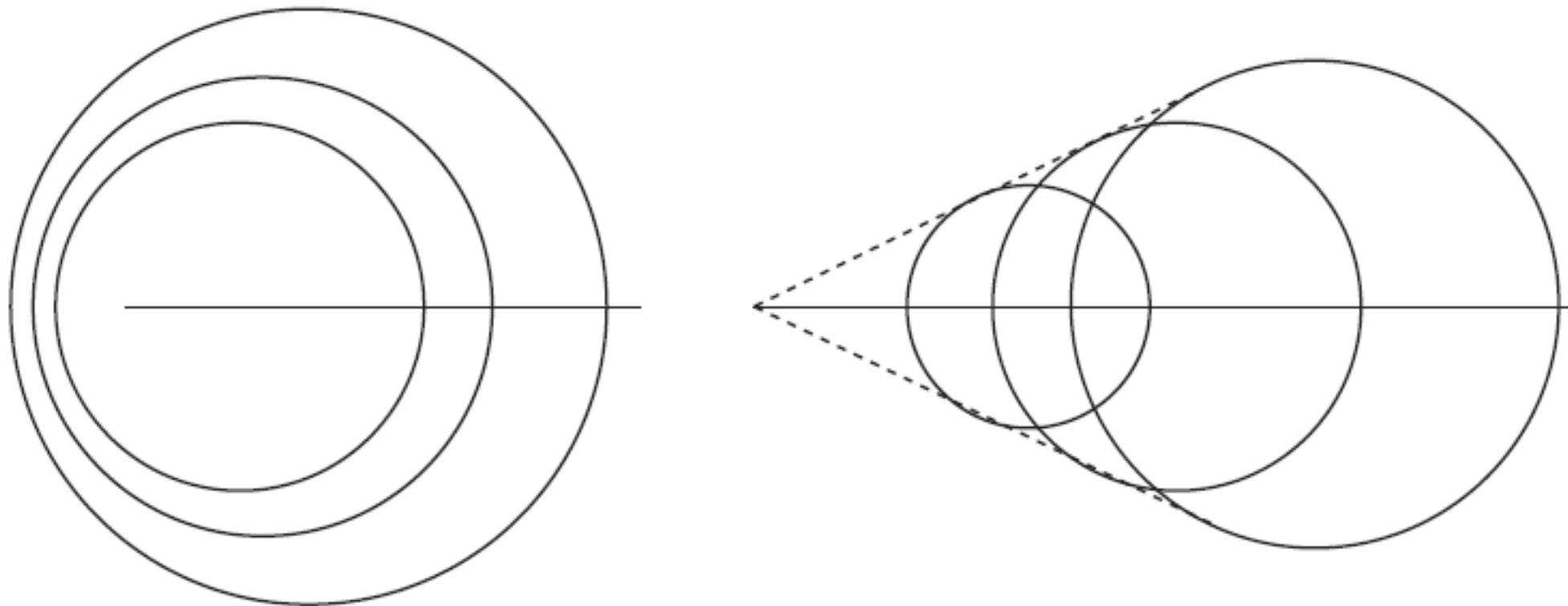


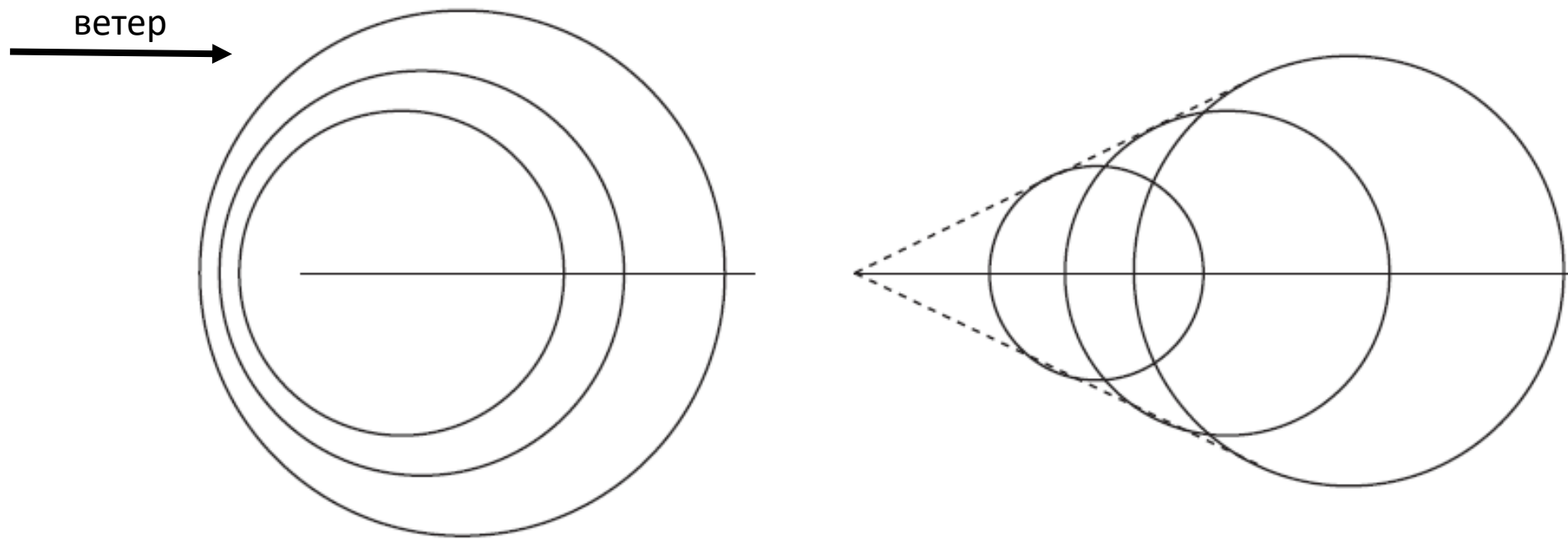
Рис. 2.15. Круги изображают поверхности постоянной фазы акустического возмущения, распространяющегося в среде, движущейся вправо с дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скоростями. Альтернативно эта же картинка изображает звук, возбуждаемый источником, движущимся влево.



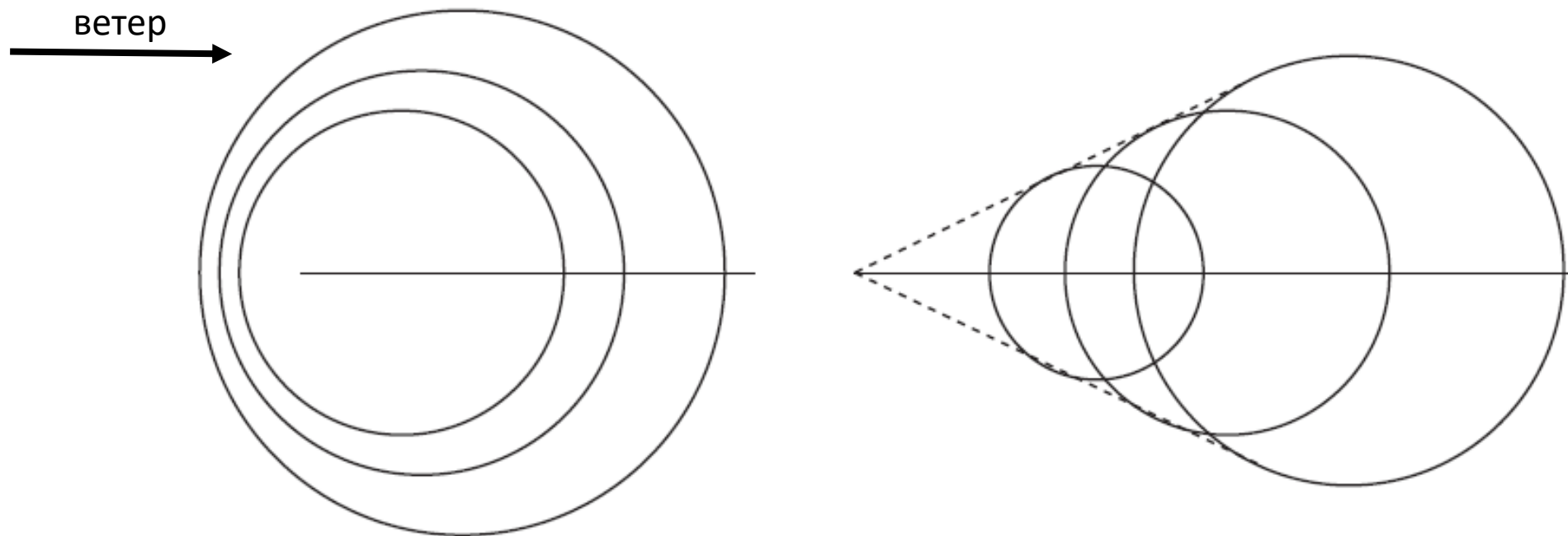
Длина волны короче перед источником и длиннее
позади него.

А частота?

Частота = скорость/длину волны

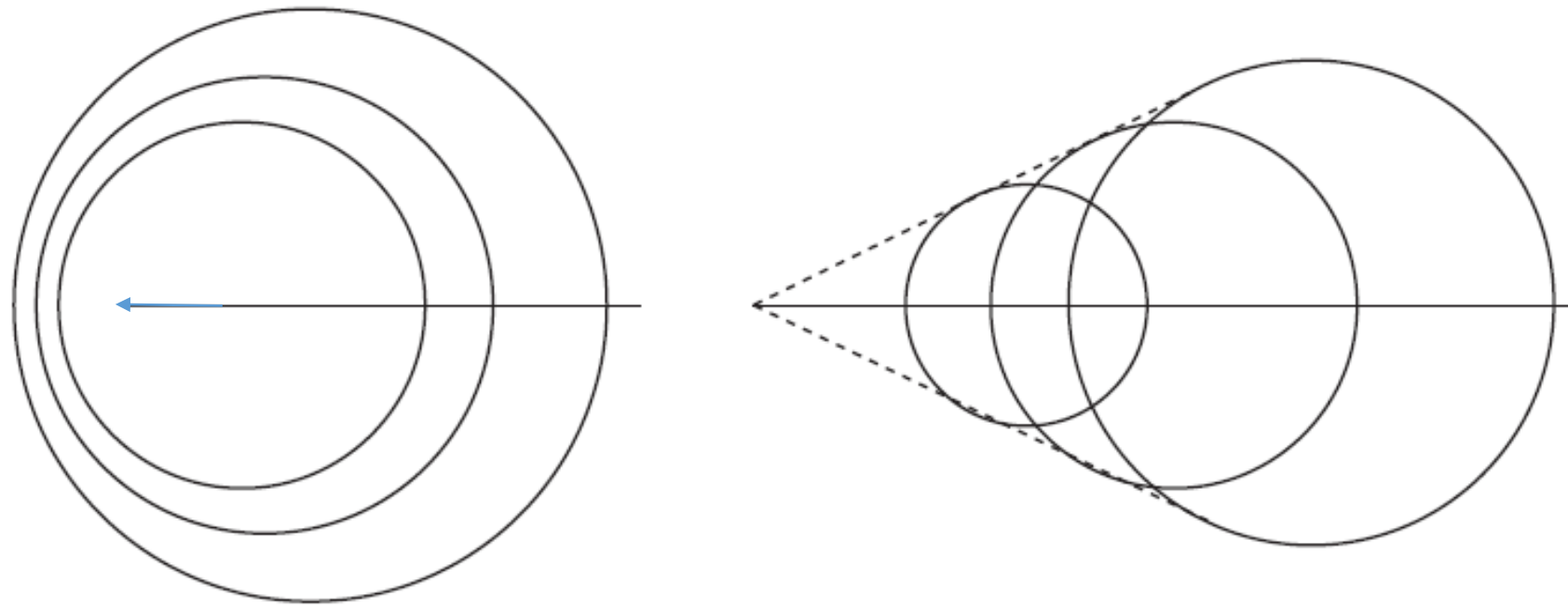


- (i) Если излучатель и приемник в покое, а движется среда, то излучаемые и принимаемые частоты одинаковы; длина же волны с наветренной стороны меньше в параметр $1 - v/c$ потому, что звук сносится ветром, так что его скорость распространения $c - v$.



- (i) Если излучатель и приемник в покое, а движется среда, то излучаемые и принимаемые частоты одинаковы; длина же волны с наветренной стороны меньше в параметр $1 - v/c$ потому, что звук сносится ветром, так что его скорость распространения $c - v$.

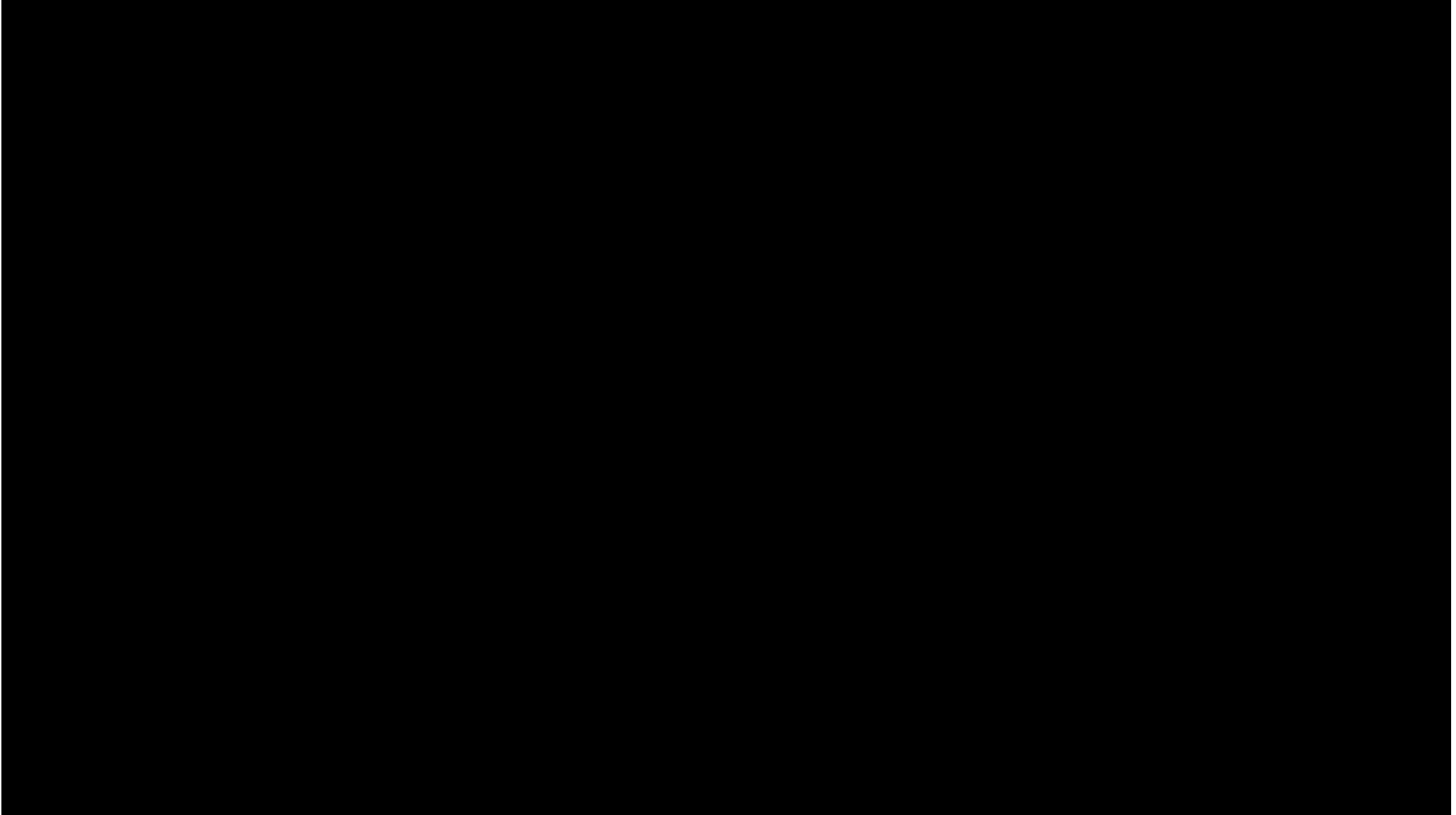
А если источник движется?



- (ii) Когда источник движется, а приемник и среда неподвижны, то скорость распространения — c , так что меньшая длина волны соответствует принимаемой частоте, увеличенной в $1/(1-v/c)$ раз. Изменение частоты вследствие относительного движения источника и приемника называется эффектом Доплера.

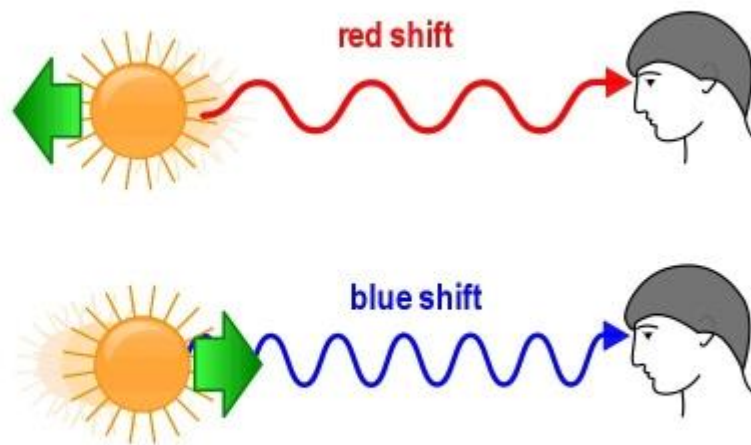
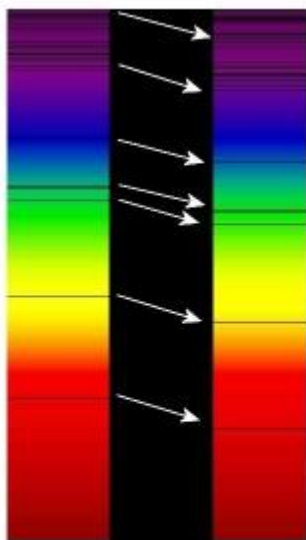
эффект Доплера и конус Маха

<https://www.youtube.com/watch?v=-Zu5SGIImwc>



Какого цвета далекие звезды?

Какого цвета далекие звезды?



the red-shift of light from distant galaxies
is assumed to indicate that the galaxies
are fast moving away - stretching the light

Какого цвета далекие звезды?

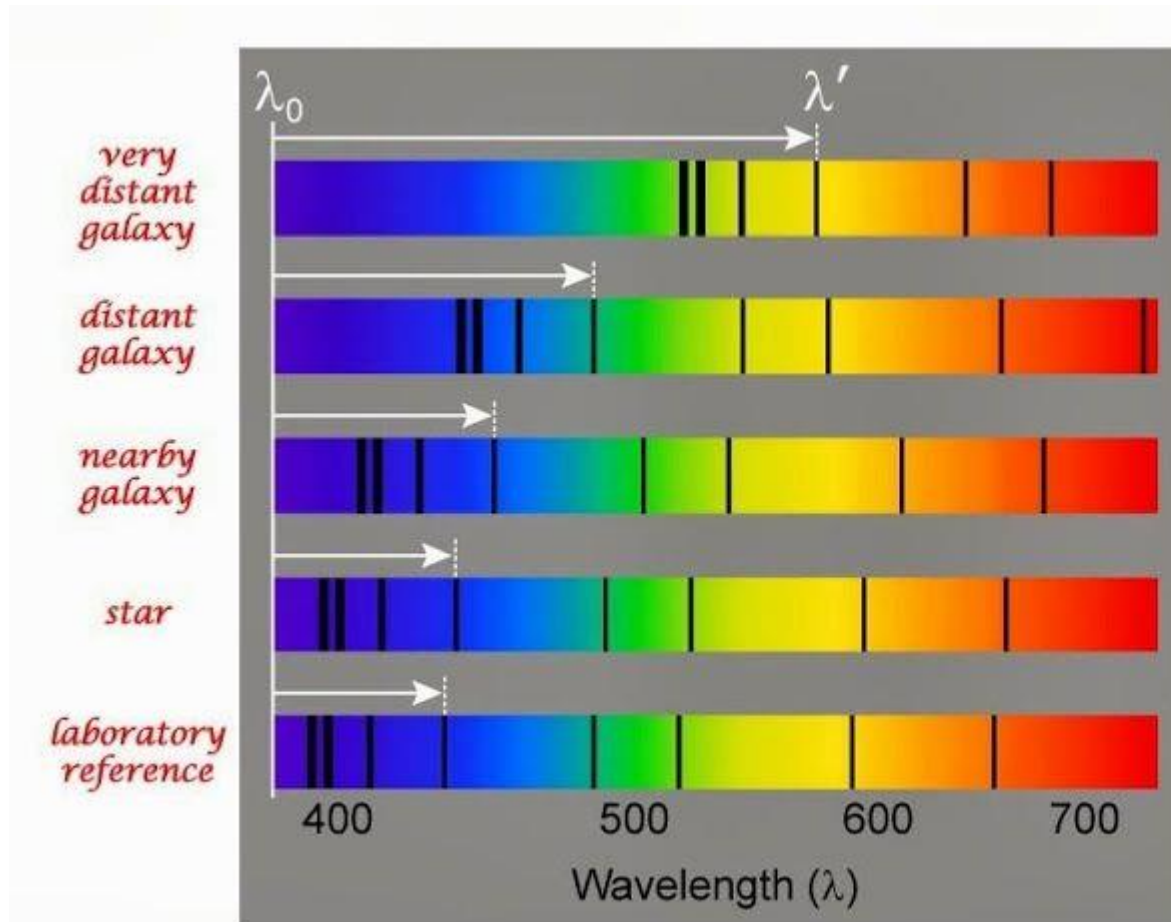


IMAGE CREDIT: UNIVERSE TODAY

Based on wavelength	Based on frequency
$z = \frac{\lambda_{\text{obsv}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}$	$z = \frac{f_{\text{emit}} - f_{\text{obsv}}}{f_{\text{obsv}}}$
$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obsv}}}{\lambda_{\text{emit}}}$	$1 + z = \frac{f_{\text{emit}}}{f_{\text{obsv}}}$

FORMULA FOR MEASURING REDSHIFT

IMAGE CREDIT: WIKIPEDIA

DISTANCE

when,

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s,}$$

$$H = 67.15 \text{ km/s/mpc,}$$

$$z = 0.5,$$

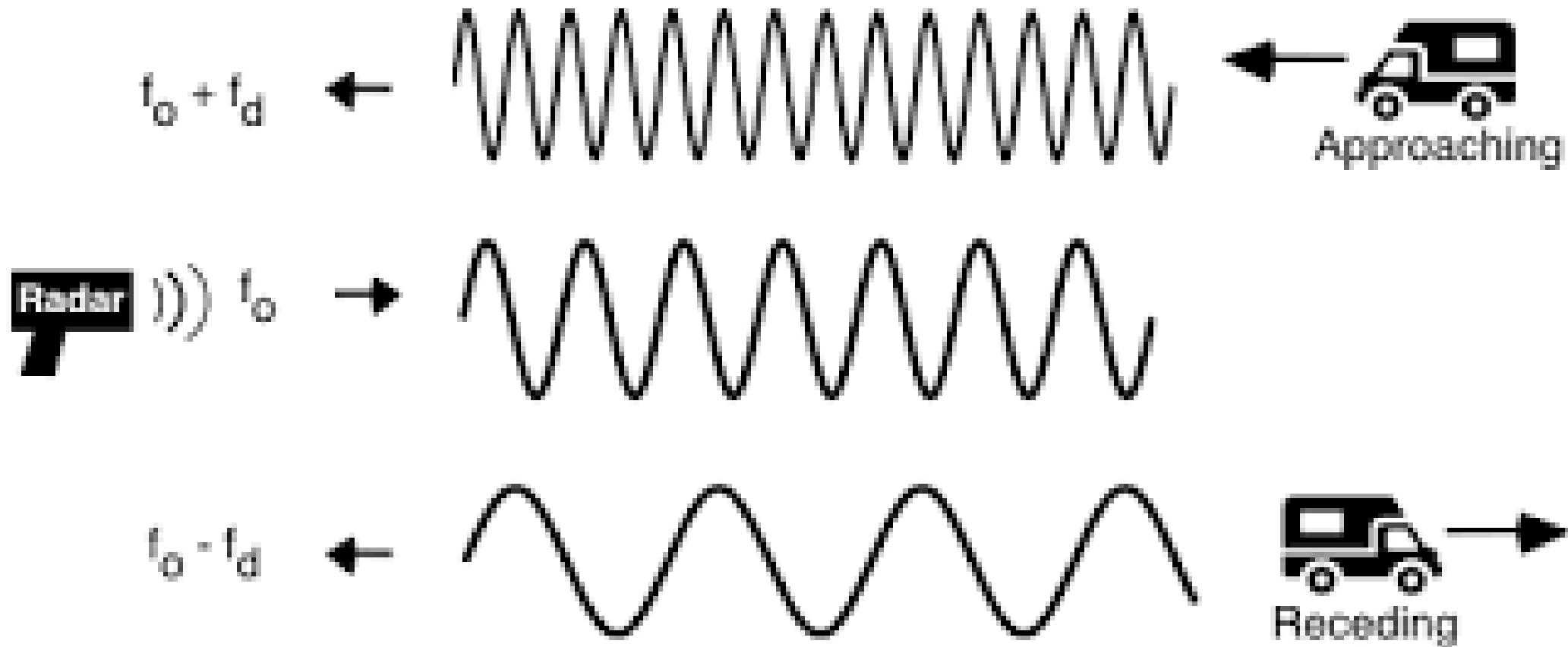
then,

$$D = (c/H) * z$$

$$= 2233.80 \text{ megaparsecs}$$

Обсудим теперь отражение звука от движущегося объекта.

Frequency



Как связан сдвиг частоты со скоростью отражателя ?

Вообразим источник излучающий максимумы волны каждую секунду, так что расстояние между ними c . Они приходят на отражатель каждые $c/(c + v)$ секунды, за это время отражатель успевает сдвинуться, так что каждый следующий отражается ближе к источнику и расстояние между максимумами (длина волны) после отражения есть $c(c - v)/(c + v)$. Импульсы возвращаются к источнику со скоростью c каждые $(c - v)/(c + v)$ секунды. Иными словами, поделив длину волны на скорость, получили период.

Неподвижный доплеровский радар излучает волну частоты ω в направлении отражателя (нашей машины), приближающейся со скоростью v . В системе отсчета машины волна падает и отражается с частотой $\omega(1+v/c)$; а вот неподвижный приемник принимает от движущегося источника волну с частотой, умноженной на дополнительный множитель $1/(1 - v/c)$, так что принимаемая частота есть $\omega(c+v)/(c-v)$.

Опишем теперь зависимость частоты от направления распространения. Рассмотрим случай среды, движущейся относительно приемника, который регистрирует частоту, отличающуюся от частоты ck в среде, где монохроматическая волна задается формулой $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - ckt)$. Координаты в движущейся и неподвижной системе связаны простым соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, так что волна в неподвижной системе задается формулой $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$. Это значит, что принимаемая в неподвижной системе частота есть

$$\omega_k = ck + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.43)$$

$$e^{ikr - i\omega t} = e^{ik(r' + vt) - i\omega t} = e^{ik(r' - ct)}$$

В системе приемника

В среде

Take-home lessons about linear acoustics

$$\varphi_{tt} = c^2 \Delta \varphi$$

$$\varphi = e^{ikr - i\omega t}$$

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

$$\omega = \pm ck$$

$$\varphi = e^{ikr - i\omega t} = e^{ik(r - ct)} \quad e^{ik(r + ct)}$$

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Нелинейная волна

Рассмотрим одномерное адиабатическое течение газа с уравнением состояния $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$. Будем искать решение уравнения непрерывности и Эйлера в виде *простой волны*, т. е. такой, что любые две из величин v , p , ρ можно выразить через одну оставшуюся. Это обобщение на нелинейный случай того, что мы сделали для линейной волны, но, конечно, решение должно получиться нестационарным, как следует из парадокса Эрншоу. Пусть скорость v будет независимой переменной, а давление и плотность функциями $p(v)$ и $\rho(v)$. Уравнения Эйлера и непрерывности примут вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} c^2(v) \frac{d\rho}{dv} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{d\rho}{dv} \frac{dv}{dt} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Здесь $c^2(v) \equiv dp/d\rho$. Исключив $d\rho/dv$, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c(v) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.31)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c(v) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$c(v) = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0 + \delta \rho}} =$$

$$= c \left(1 + \frac{\delta p}{2p_0} - \frac{\delta \rho}{2\rho_0} \right) = c + v \frac{\gamma - 1}{2}$$

$$\delta \rho / \rho_0 = v / c.$$

звук пушечного залпа распространяется быстрее, чем команда «пли»

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c(v) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$c(v) = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0 + \delta \rho}} =$$

$$= c \left(1 + \frac{\delta p}{2p_0} - \frac{\delta \rho}{2\rho_0} \right) = c + v \frac{\gamma - 1}{2}$$

$$\delta \rho / \rho_0 = v/c.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right) v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right) v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

ввести характеристики — линии в $x-t$ -плоскости, которые соответствуют постоянной v , как показано на рисунке 2.10:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = c + v \frac{\gamma + 1}{2} \Rightarrow x = x_0 + ct + \frac{\gamma + 1}{2} v(x_0)t, \quad (2.35)$$

где $x_0 = f^{-1}(v)$. Решение (2.35) называется волной Римана или простой волной.

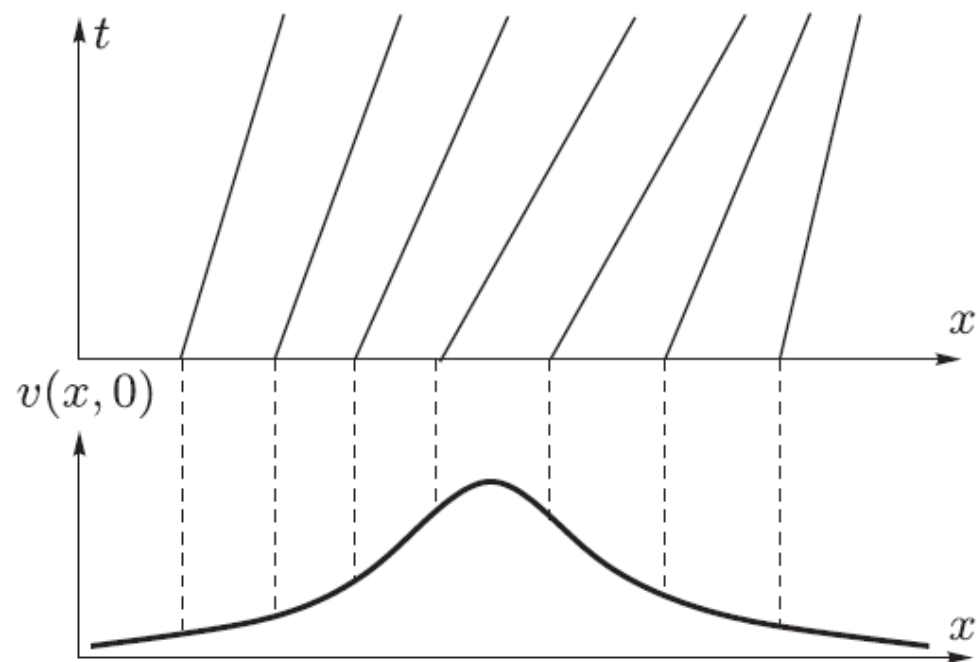


Рис. 2.10. Характеристики (вверху) и начальное распределение скорости (внизу).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right) v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В переменных $\xi = x - ct$ и $u = v(\gamma + 1)/2$ уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du}{dt} = 0,$$

описывающий просто-напросто свободно (по инерции) летящие частицы, каждая со своей неизменной скоростью. Действительно, характеристики — это прямые линии с наклонами, задаваемыми начальным распределением $v(x, 0)$.

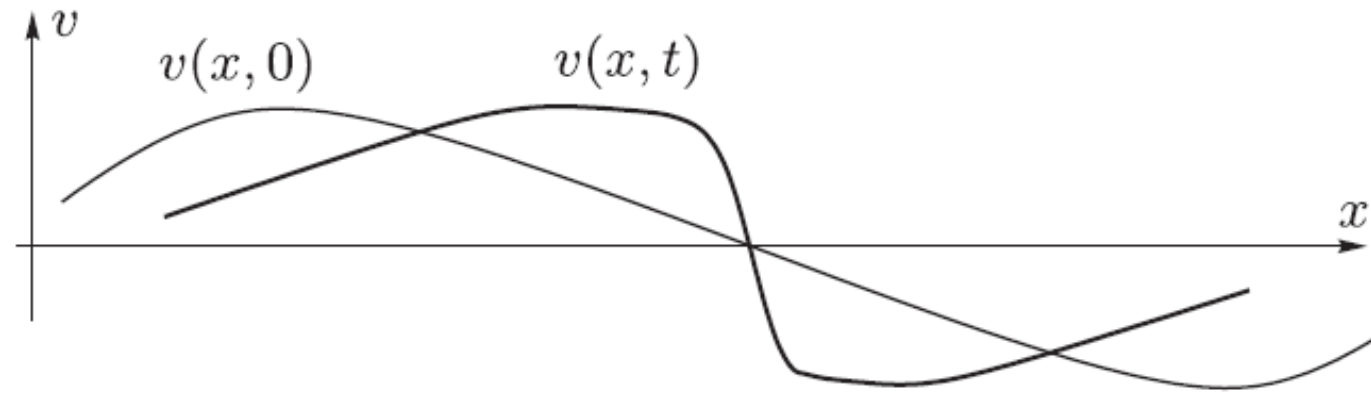


Рис. 2.11. Эволюция профиля скорости при опрокидывании волны.

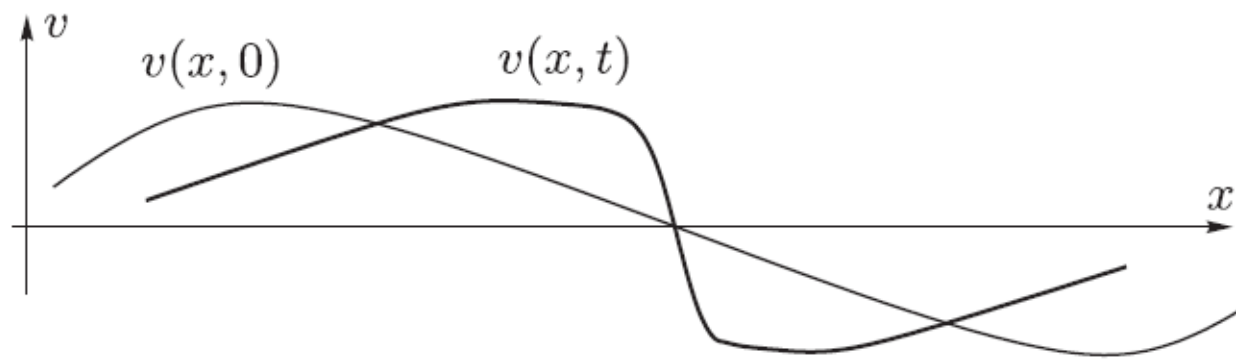


Рис. 2.11. Эволюция профиля скорости при опрокидывании волны.

Видно, что части профиля скорости с положительной $\partial v(x, 0)/\partial x$ становятся более пологими, тогда как убывающий склон с отрицательной $\partial v(x, 0)/\partial x$ становится все круче (рис. 2.11). Характеристики $x(x_0, t)$ пересекаются в $x-t$ -плоскости, когда $(\partial x/\partial x_0)_t$ обращается в ноль:

$$x = x_0 + ct + \frac{\gamma + 1}{2} v(x_0) t \qquad 1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dv}{dx_0} t = 0.$$

Первыми пересекутся характеристики, соответствующие максимально отрицательной производной $dv/dx_0 = f'(x_0)$, что означает $f''(x_0) = 0$. При пересечении характеристик два различных значения скорости существуют в одной точке, что соответствует разрыву поля скорости и образованию ударной волны. Подчеркнем, что при образовании ударной волны пересекаются характеристики, двигавшиеся со скоростями $c + u(x_0)$, а не траектории частиц жидкости,двигающиеся со скоростями $v(x, t)$.

Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$u = -2\nu\varphi_\xi/\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi}}{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = \varphi C'(t)$$

$$\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = 0.$$

$$\varphi_t - \nu \varphi_{\xi\xi} = 0.$$

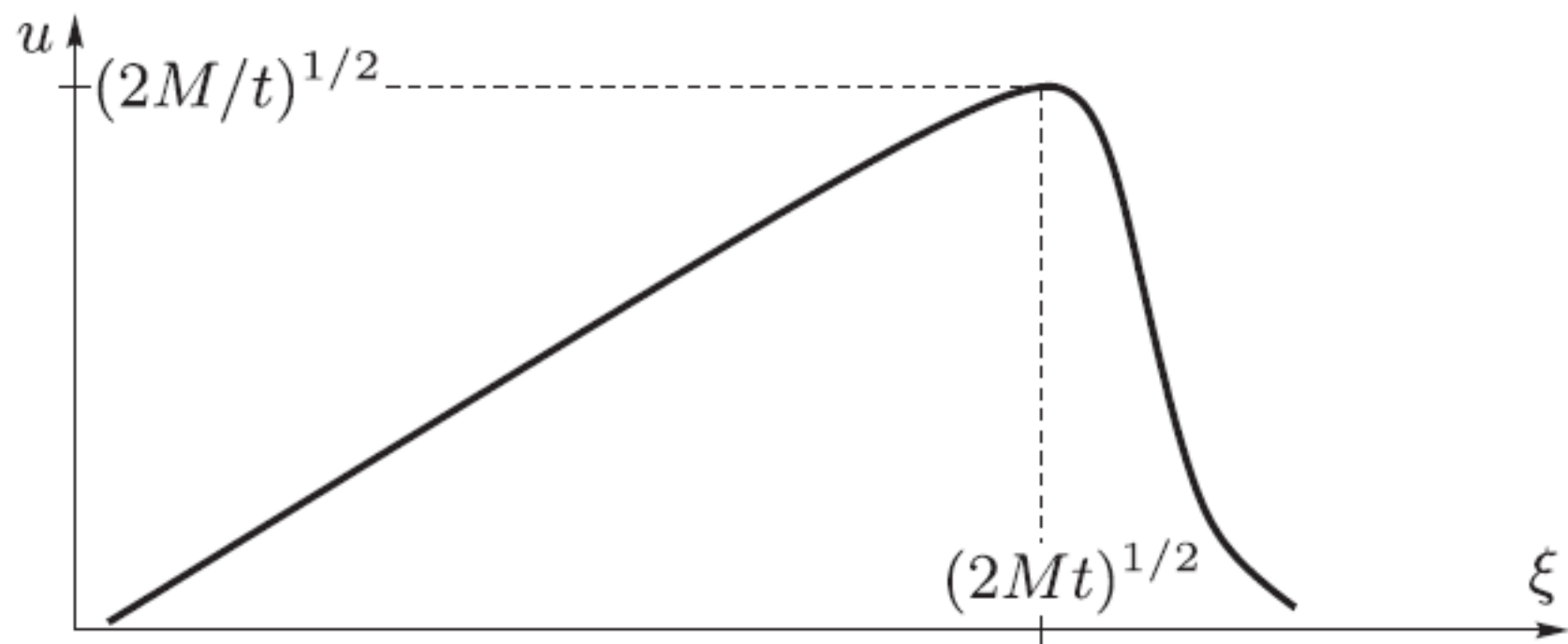
Задача с начальными условиями имеет простое решение:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi', 0) \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t}\right] d\xi' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t} - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\xi'} u(\xi'', 0) d\xi''\right] d\xi' \end{aligned}$$

Как любая система с вязкостью, уравнение Бюргерса диссипирует энергию, но сохраняет импульс $M = \int u(x) dx$.²⁰ Если импульс конечен, то любое возмущение приобретает со временем универсальную форму, зависящую только от M и не зависящую от $u(\xi, 0)$. В пределе $t \rightarrow \infty$ уравнение (2.37) дает $\varphi(\xi, t) \rightarrow \pi^{-1/2} F[\xi(4\nu t)^{-1/2}]$, где

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\eta^2 - \frac{1}{2\nu} \int_0^{(y-\eta)\sqrt{4\nu t}} u(\eta', 0) d\eta' \right] d\eta \approx$$

$$\approx e^{-M/4\nu} \int_{-\infty}^y e^{-\eta^2} d\eta + e^{M/4\nu} \int_y^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$



Стационарная бегущая волна

$$u(\xi - wt).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$-wu_{\xi} + uu_{\xi} = \nu u_{\xi\xi}$$

Стационарная бегущая волна

$$u(\xi - wt).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

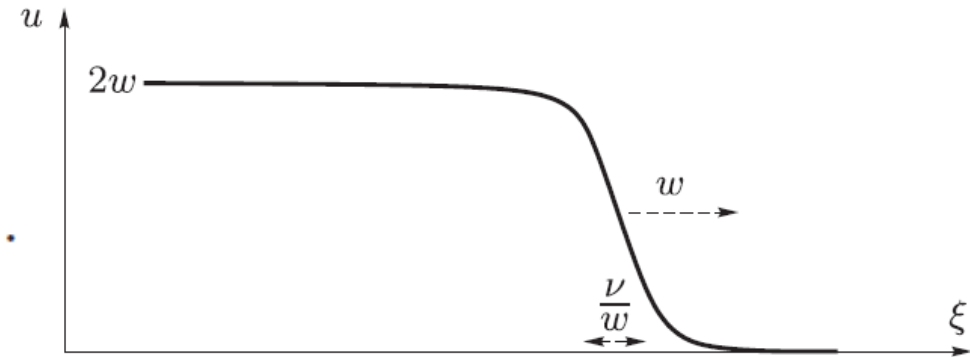
$$-wu_\xi + uu_\xi = \nu u_{\xi\xi}$$

$$-uw + u^2/2 = \nu u_\xi$$

$u \rightarrow 0$ по крайней мере на одной из бесконечностей.

Существует стационарное решение и с бесконечным полным импульсом — это ударная волна. Будем искать решение в виде волны, перемещающейся без изменения формы: $u(\xi - wt)$. В этом случае уравнение Бюргера редуцируется до обыкновенного дифференциального уравнения, которое сразу можно проинтегрировать раз, что дает $-uw + u^2/2 = \nu u_\xi$, если предположить $u \rightarrow 0$ по крайней мере на одной из бесконечностей. Проинтегрировав еще раз, получим

$$u(\xi, t) = \frac{2w}{1 + C \exp[w(\xi - wt)/\nu]}.$$



Это решение называется ударной волной, поскольку оно описывает резкое изменение скорости в пространстве: ширина фронта ν/w мала при малой вязкости. Фронт распространяется со скоростью, равной полусумме скоростей по обе стороны — это нетрудно понять, представив фронт как место, где быстрая частица настигает медленную, после чего они слипаются и дальше двигаются вместе с суммарным импульсом. Форма ударной волны стационарна, поскольку нелинейность уравновешена вязкостью.

Диспергирующие волны

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $\exp(ikr - i\omega t)$. Следовательно, любые линейные волны могут быть полностью охарактеризованы так называемым дисперсионным соотношением между частотой волны ω и длиной волны λ . Как подобает физикам или инженерам, прежде чем приступить к формальным выкладкам, попробуем оценить $\omega(\lambda)$ с точностью до числового коэффициента. Простейшие оценки обычно получаются из соображений размерности. Если сила тяжести является доминирующей возвращающей силой,



$$\omega^2 = g^a \lambda^b$$

Диспергирующие волны

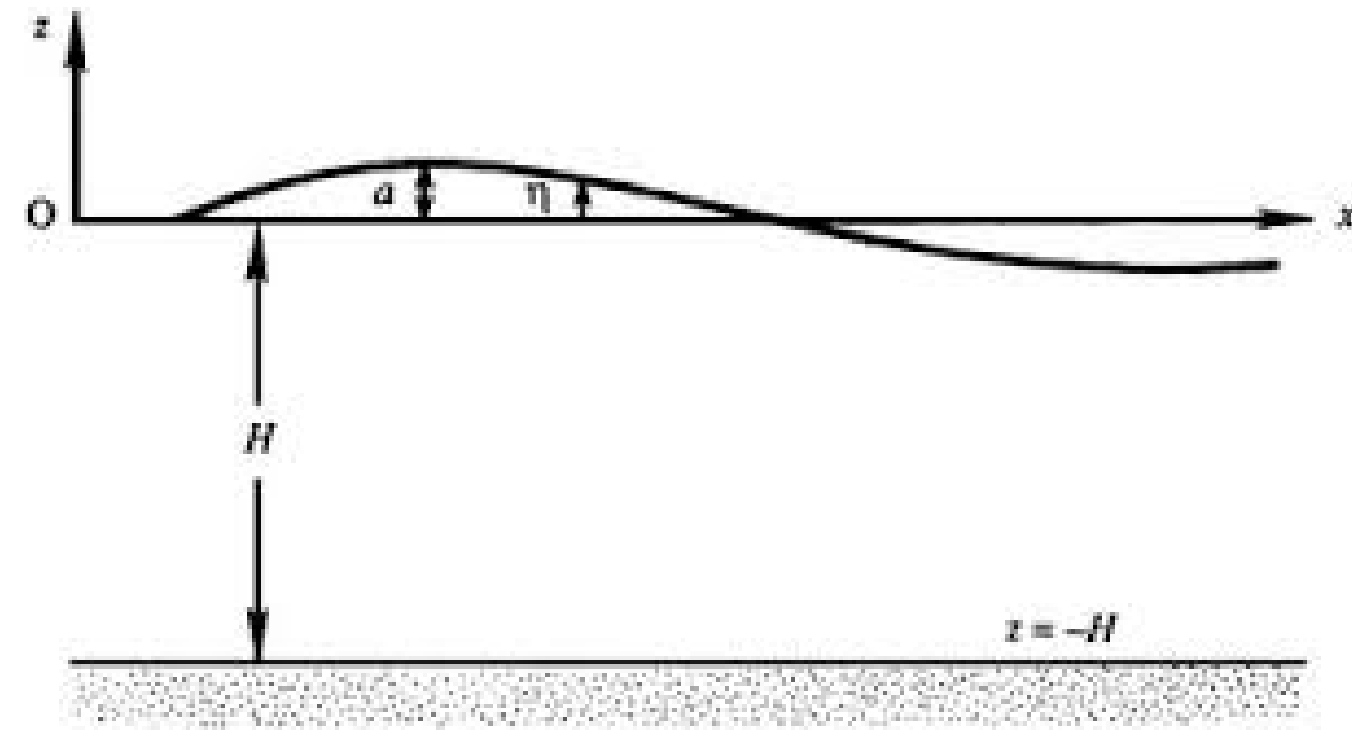
Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Следовательно, любые линейные волны могут быть полностью охарактеризованы так называемым дисперсионным соотношением между частотой волны ω и длиной волны λ . Как подобает физикам или инженерам, прежде чем приступить к формальным выкладкам, попробуем оценить $\omega(\lambda)$ с точностью до числового коэффициента. Простейшие оценки обычно получаются из соображений размерности. Если сила тяжести является доминирующей возвращающей силой,



$$\omega^2 = g\lambda^{-1}$$

Диспергирующие волны

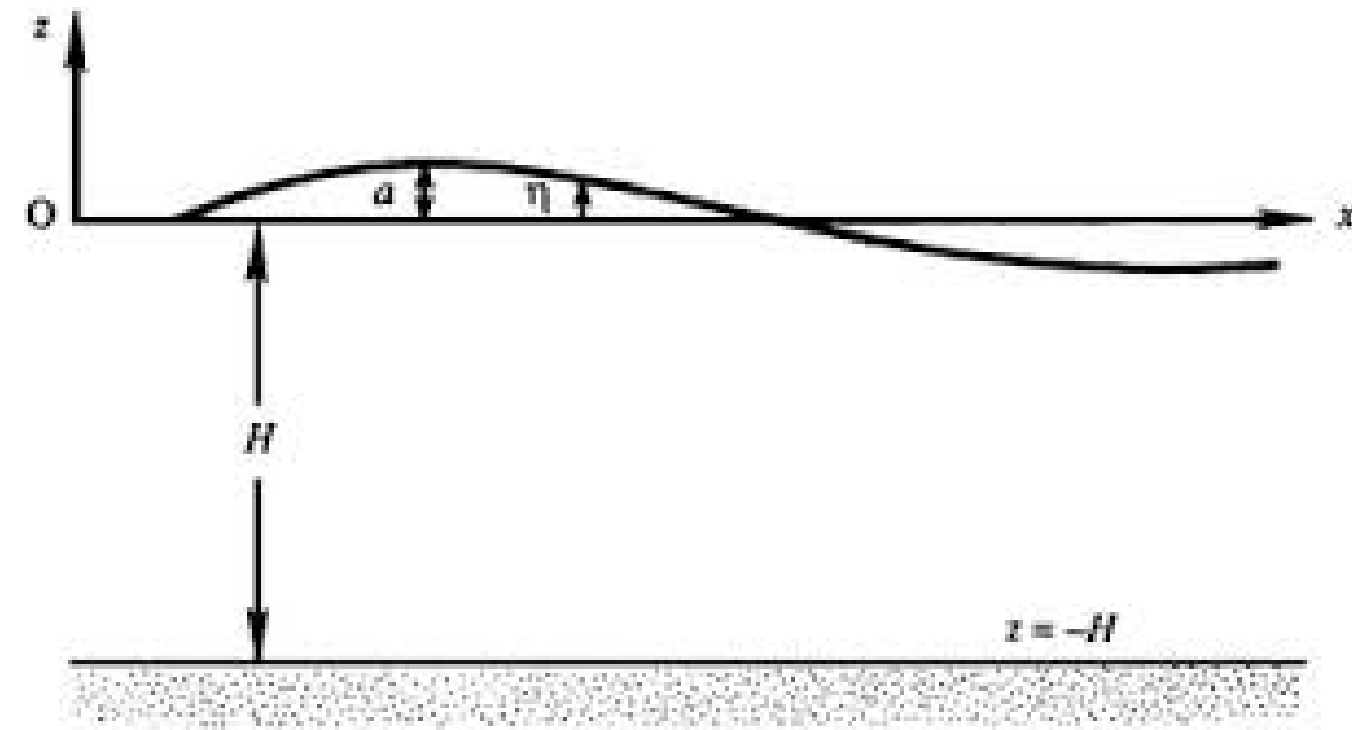
Если же сила поверхностного натяжения доминирует, то, помимо коэффициента поверхностного натяжения α (с размерностью сила/длину=грамм/с²), должна также входить плотность жидкости ρ , характеризующая инерцию. В этом случае имеется четыре величины, ω , λ , α , ρ , и три размерности *грамм*, *сантиметр* и *секунда*, так что выражение для частоты (с точностью до безразмерного параметра)



$$\omega^2 = \lambda^{-2} (\alpha / \rho)$$

Диспергирующие волны

Если же сила поверхностного натяжения доминирует, то, помимо коэффициента поверхностного натяжения α (с размерностью сила/длину=грамм/с²), должна также входить плотность жидкости ρ , характеризующая инерцию. В этом случае имеется четыре величины, ω , λ , α , ρ , и три размерности *грамм*, *сантиметр* и *секунда*, так что выражение для частоты (с точностью до безразмерного параметра)



$$\omega^2 = \lambda^{-3}(\alpha/\rho)$$

Гравитационные волны на поверхности

Внутри жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Жидкость несжимаемая: $\rho = \text{const}$

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$$

Если $\sin(x)$, то должно быть $\exp(z)$

Гравитационные волны на поверхности

На поверхности жидкости

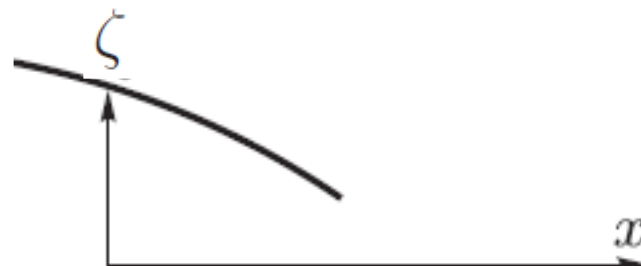
$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$

$$dv_x/dt = -g\partial\zeta/\partial x.$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

Гравитационные волны на поверхности

На поверхности жидкости


$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$$

$$dv_x/dt = -g\partial\zeta/\partial x.$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

$$\phi(x, z, t) = a \cos(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)]$$

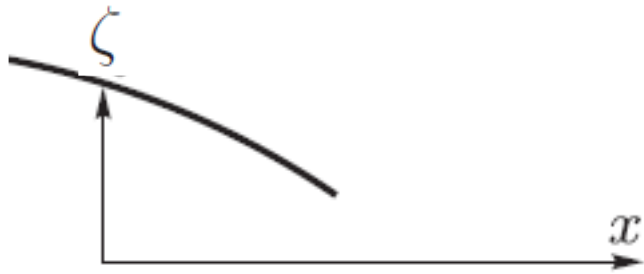
$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$

$$\zeta = -a(\omega/g) \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)]$$

$$v_x = -ak \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)],$$

$$v_z = ak \cos(kx - \omega t) \sinh[k(z + h)].$$

Гравитационные волны на поверхности



$$dv_x/dt = -g\partial\zeta/\partial x.$$

Заметим, что в линейном приближении $v_x = gk\zeta/\omega$, т. е. жидкость двигается вперед на горбах и назад во впадинах, как известно каждому пловцу.

$$\zeta = -a(\omega/g) \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)]$$

$$v_x = -ak \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)],$$

$$v_z = ak \cos(kx - \omega t) \sinh[k(z + h)].$$

Траектории частиц жидкости можно получить, интегрируя уравнение $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ в предположении малых колебаний вблизи $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0)$, как при решении (2.29). Смещение частиц жидкости за период, оцениваемое как скорость ka на время $2\pi/\omega$, предполагается много меньше длины волны $2\pi/k$. В первом порядке по малому параметру ak^2/ω получаем

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{ak}{\omega} \cos(kx_0 - \omega t) \cosh[k(z_0 + h)], \\ z &= z_0 - \frac{ak}{\omega} \sin(kx_0 - \omega t) \sinh[k(z_0 + h)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Траектории — это эллипсы:

$$\left(\frac{x - x_0}{\cosh[k(z_0 + h)]} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\sinh[k(z_0 + h)]} \right)^2 = \left(\frac{ak}{\omega} \right)^2.$$

При удалении от поверхности вглубь амплитуда колебаний уменьшается, вдобавок эллипсы сплюсываются при приближении ко дну.

раскатории это эллипсы.

$$\left(\frac{x - x_0}{\cosh[k(z_0 + h)]} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\sinh[k(z_0 + h)]} \right)^2 = \left(\frac{ak}{\omega} \right)^2.$$

При удалении от поверхности вглубь амплитуда колебаний уменьшается, вдобавок эллипсы сплюсчиваются при приближении ко дну.

Можно различить два предела по отношению глубины жидкости к длине волны. На мелкой воде ($kh \ll 1$) колебания жидкости почти одномерны: $v_z/v_x \propto kh$, а дисперсионное соотношение звуковое: $\omega = \sqrt{gh} k$

$$v_x = -ak \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)],$$

$$v_z = ak \cos(kx - \omega t) \sinh[k(z + h)].$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$



Гравитационные волны на мелкой воде
имеют акустический закон дисперсии

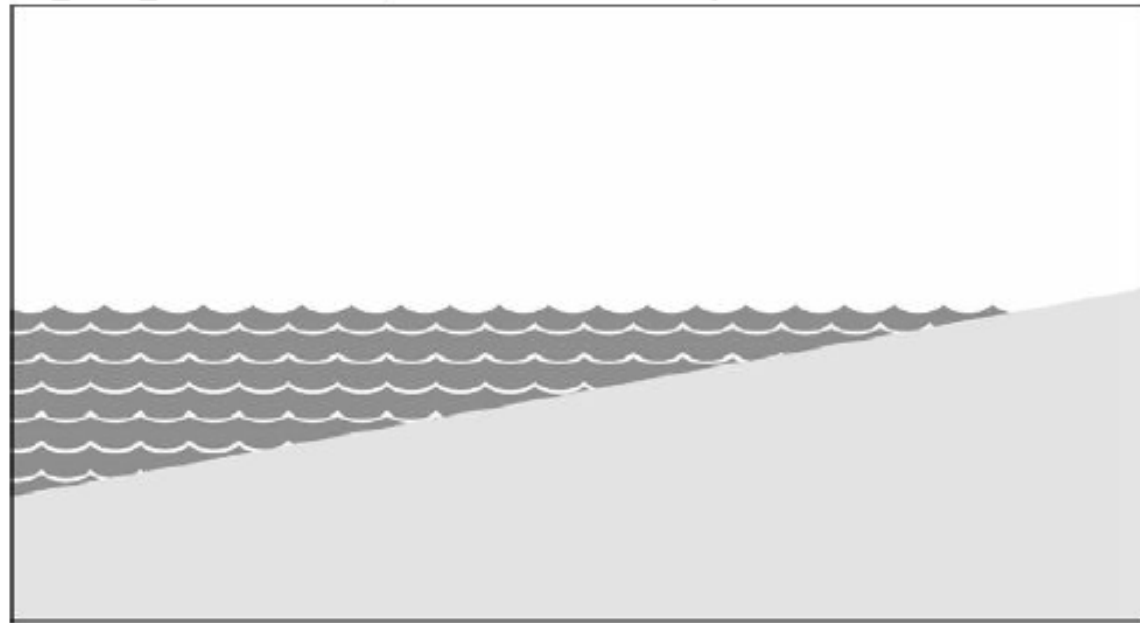
$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$

$$kh \rightarrow 0$$

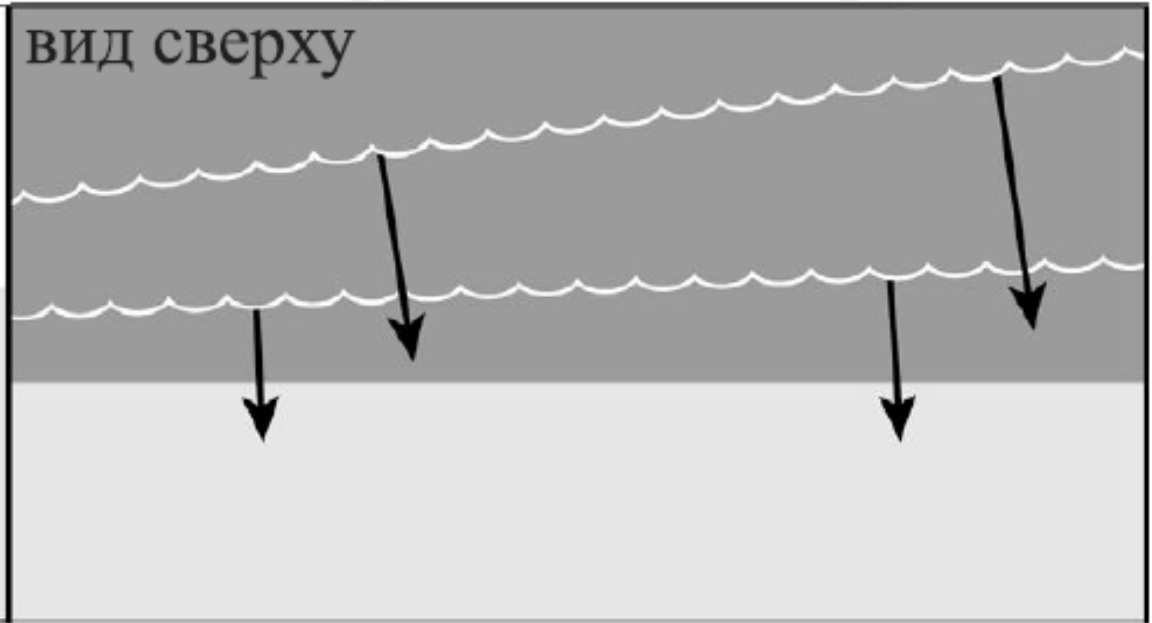
$$\omega = \sqrt{gh} k$$

Скорость волны $v_g = \sqrt{gh}$ возрастает с глубиной. Глубина же обычно уменьшается при приближении к берегу. Если волна приходит под углом, то части волновых фронтов на более глубоких местах движутся быстрее, так что фронты разворачиваются к берегу (похоже на рефракцию, описанную в задаче 2.8).

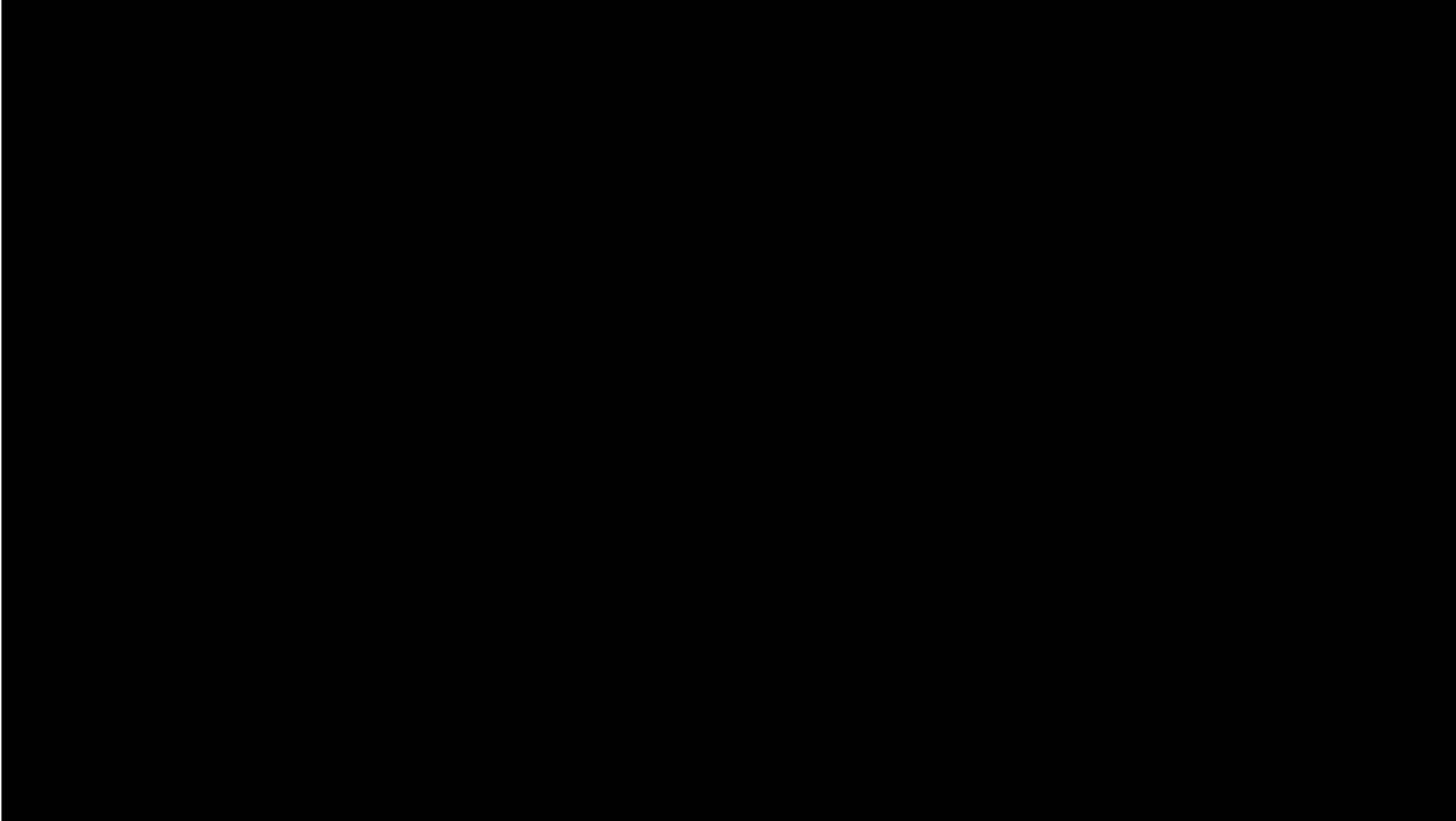
профиль дна, вид сбоку



волновые фронты и их скорости,
вид сверху



Волны на мелкой воде опрокидываются как и звук



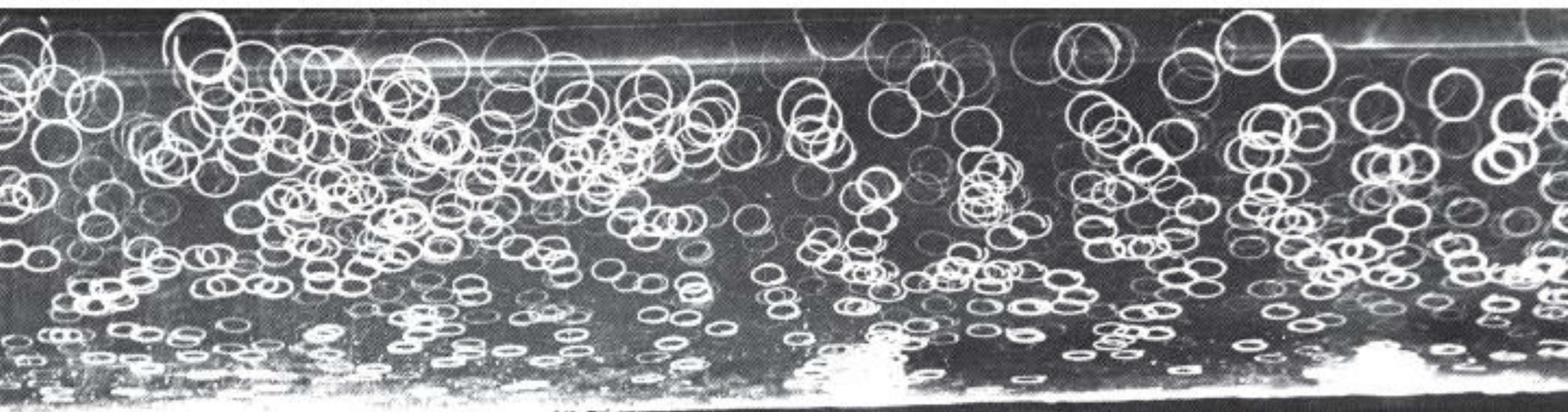
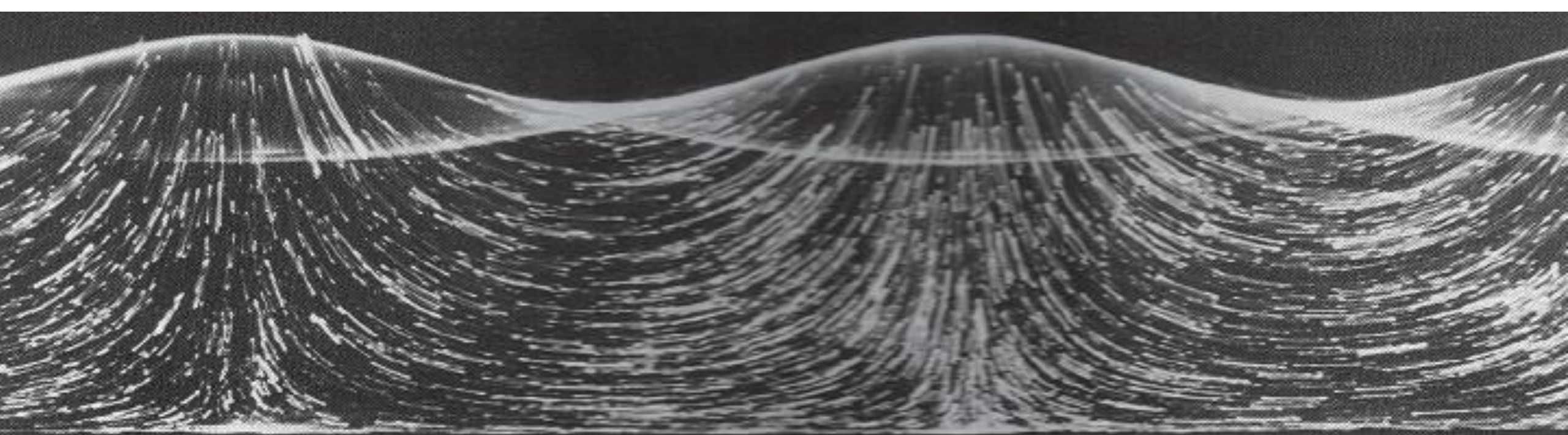
Для волны на глубокой воде ($kh \gg 1$) частота $\omega = \sqrt{gk}$ похожа на частоту $\sqrt{g/L}$ для маятника с длиной подвески L . Действительно, стоячая поверхностная волна является, в сущности, жидким маятником, что хорошо видно из верхнего рисунка 3.1. Для бегущей волны получаем

$$\zeta = -\frac{u}{\omega} \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.11)$$

$$v_x = -u \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.12)$$

$$v_z = u \cos(kx - \omega t) e^{kz}. \quad (3.13)$$

Частицы жидкости движутся по окружностям, радиусы которых экспоненциально убывают с глубиной с показателем экспоненты, равным горизонтальному волновому числу. Это опять-таки свойство решений уравнения Лапласа, упоминавшееся в параграфе 2.2.3: если решение осциллирует в одном направлении, оно убывает экспоненциально в поперечном направлении. Это подтверждает наше предположение, что поверхностная волна на глубокой воде вовлекает в движение слой жидкости, сравнимый с длиной волны, что хорошо знакомо ныряльщикам.



Во втором порядке бегущая волна имеет ненулевой импульс и сопровождается средним дрейфом, называемый стоксовым.

$$\zeta = -\frac{u}{\omega} \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.11)$$

$$v_x = -u \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.12)$$

Умножая (3.11) на (3.12) и усредняя по периоду, получим средний импульс на единице площади: $\rho \langle \zeta v_x \rangle = \rho u^2 / 2\omega$. В точности как в (2.30), можно найти дрейфовую скорость:

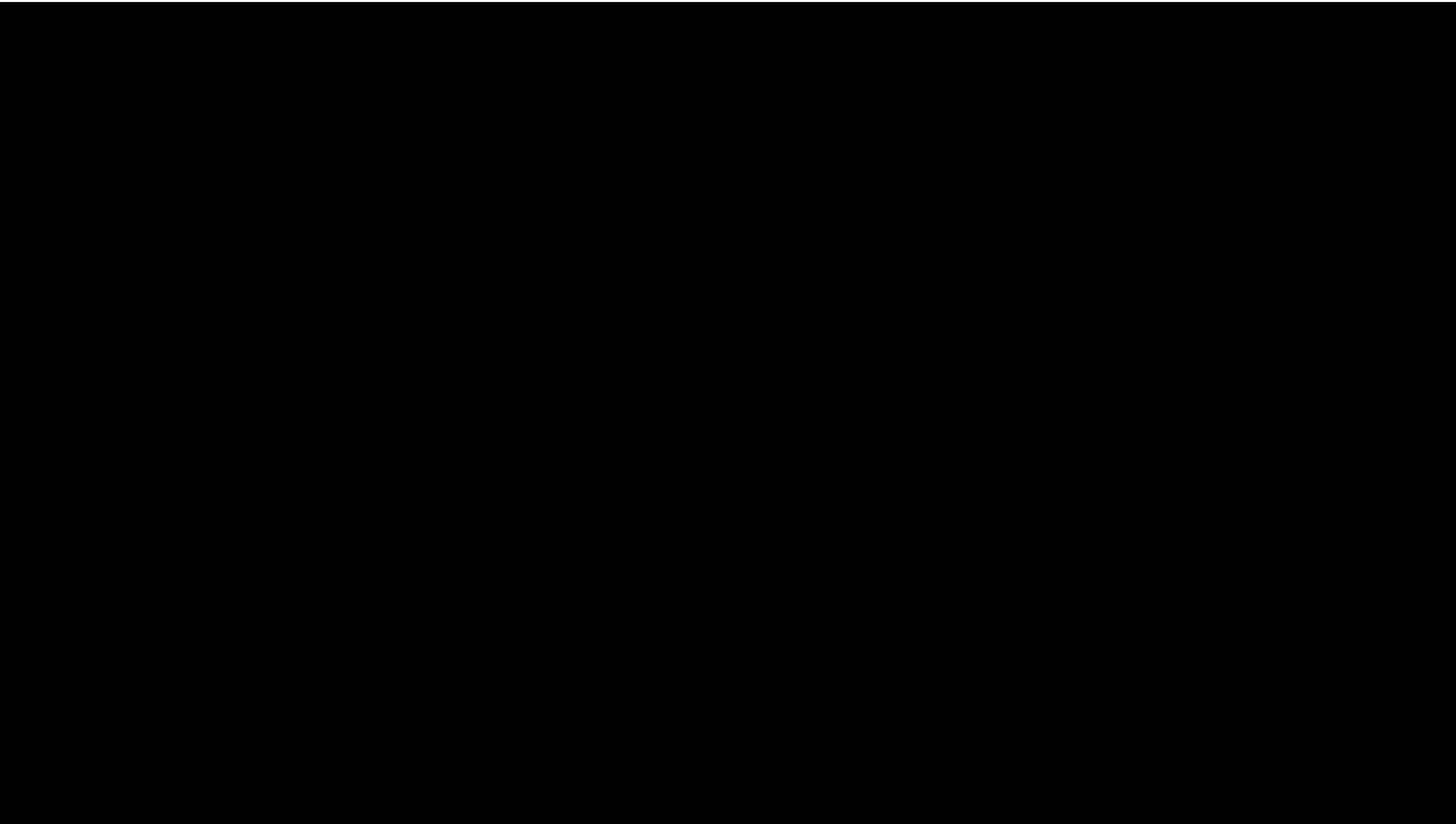
$$v_x \approx -u \sin(kx_0 - \omega t) - ku(x - x_0) \cos(kx - \omega t) - ku(z - z_0) \sin(kx - \omega t).$$

$$\langle v_x \rangle = -ku \langle (x - x_0) \cos(kx - \omega t) + (z - z_0) \sin(kx - \omega t) \rangle = \frac{ku^2}{\omega}$$

Стоксов дрейф для гравитационных волн на глубокой воде

<https://youtu.be/oPplzgEcyGc>

Если утекает, откуда
притекает?



Во втором порядке бегущая волна имеет ненулевой импульс и сопровождается средним дрейфом, называемый стоксовым.

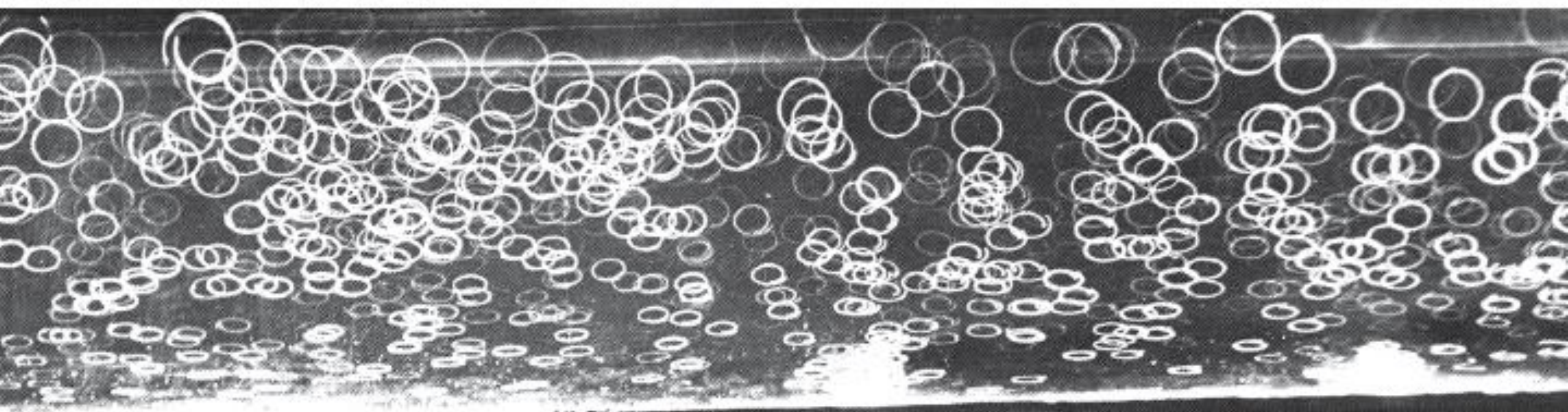
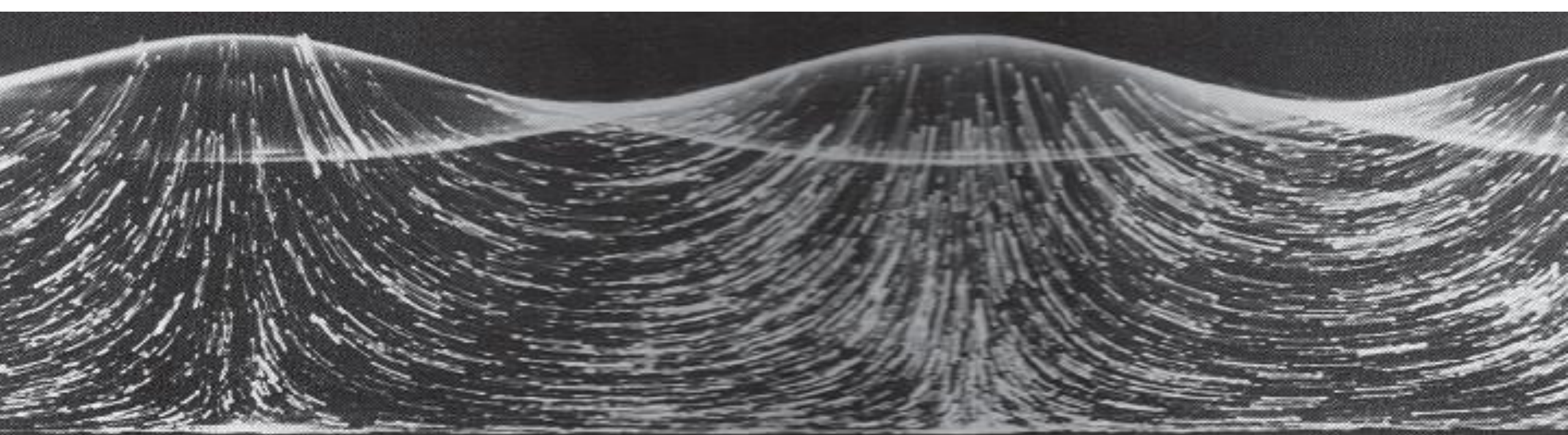
$$\zeta = -\frac{u}{\omega} \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.11)$$

$$v_x = -u \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.12)$$

Умножая (3.11) на (3.12) и усредняя по периоду, получим средний импульс на единице площади: $\rho \langle \zeta v_x \rangle = \rho u^2 / 2\omega$. В точности как в (2.30), можно найти дрейфовую скорость:

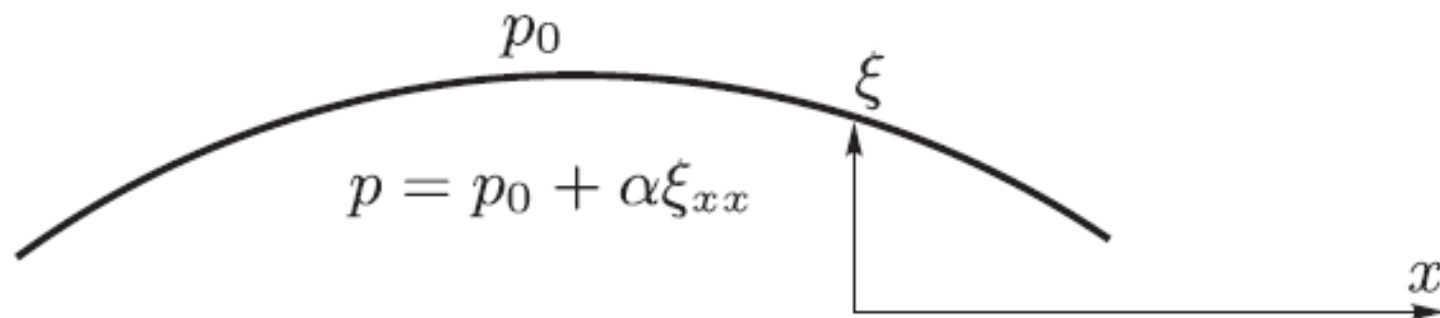
$$\langle v_x \rangle = -ku \langle (x - x_0) \cos(kx - \omega t) + (z - z_0) \sin(kx - \omega t) \rangle = \frac{ku^2}{\omega}. \quad (3.14)$$

В глубоком бассейне конечной длины поверхностный дрейф должен компенсироваться противотоком у дна. Если же глубина небольшая, то течения у поверхности и дна разделить невозможно, так что распространение волны на мелкой воде может и не сопровождаться течением, в точности как для звука.



Капиллярные волны

Поверхностное натяжение создает дополнительный перепад давления, пропорциональный кривизне поверхности:



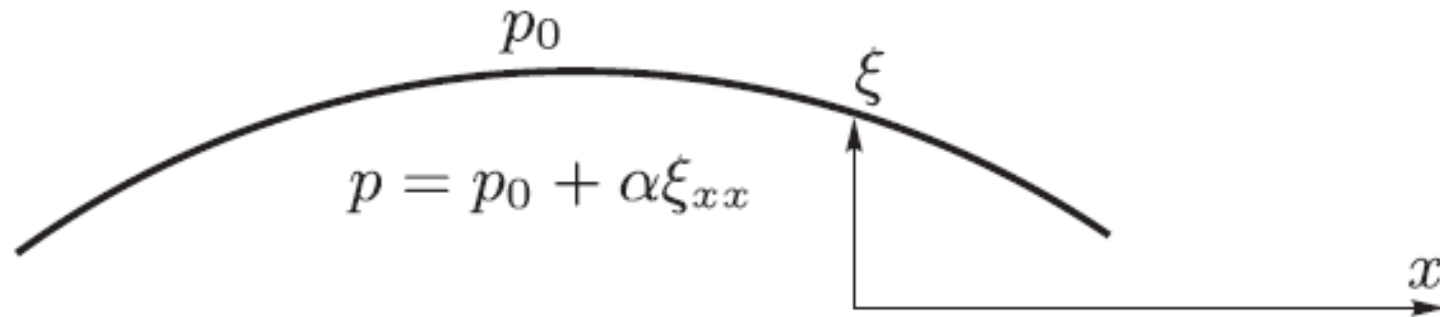
Это изменит второе уравнение (3.4),

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.4)$$

Капиллярные волны

Поверхностное натяжение создает дополнительный перепад давления, пропорциональный кривизне поверхности:



Это изменит второе уравнение (3.4),

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

и добавит энергию поверхностного натяжения к дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = \left(gk + \alpha k^3 / \rho \right) \tanh kh. \quad (3.17)$$

Капиллярные волны

$$\omega^2 = \left(gk + \alpha k^3 / \rho \right) \tanh kh$$

Как видно, существует волновое число $k_* = \sqrt{\rho g / \alpha}$ отделяющее длинные гравитационные волны от коротких капиллярных. Для воды

$$\alpha \simeq 70 \text{ эрг см}^{-2} \text{ и } \lambda_* = 2\pi / k_* \simeq 1.6 \text{ см}$$

Теперь мы можем ответить на вопрос:

Почему вода выливается из перевернутого стакана?

Капиллярные волны

$$\omega^2 = \left(gk + \alpha k^3 / \rho \right) \tanh kh \quad k_* = \sqrt{\rho g / \alpha},$$

Почему вода выливается из перевернутого стакана?

Вопрос кажется дурацким только необразованному человеку. Образованные люди знают, что атмосферное давление при нормальных условиях порядка $P = 10^5$ ньютон на квадратный метр, что достаточно, чтобы удержать до $P/\rho g = 10$ метров столба воды. Так что если бы поверхность жидкости оставалась плоской, то атмосферное давление легко удержало бы воду в стакане. Однако при отрицательной силе тяжести частота становится мнимой, $e^{-i\omega t}$ что значит, что плоская поверхность неустойчива:

$$k < k_* \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \propto -gk + \alpha k^3 < 0$$

А почему из стакана выливается, а из узкого капилляра нет?

$$k < k_* \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \propto -gk + \alpha k^3 < 0$$

А почему из стакана выливается, а из узкого капилляра нет?

$$k < k_* \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \propto -gk + \alpha k^3 < 0$$

Если вместо стакана узкий капилляр с диаметром меньше λ_* , то неустойчивая мода не поместится и вода не вытечет.

3.1.4. Фазовая и групповая скорости волны

Обсудим общие свойства одномерного распространения линейных диспергирующих волн. Для этого удобно использовать представление Фурье, поскольку каждая гармоника $\exp(i k x - i \omega_k t)$ распространяется с постоянной скоростью ω_k / k , полностью определяемой зависимостью частоты от волнового числа ω_k . Простейшим является рассмотрение возмущения гауссовой формы

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0 \exp(i k_0 x - x^2 / l^2),$$

фурье-образ которого в k -пространстве также гауссов:

$$\zeta(k, 0) = \int dx \zeta_0 \exp \left[i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{l^2} \right] = \zeta_0 l \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{l^2}{4} (k_0 - k)^2 \right].$$

$$\zeta(k, 0) = \int dx \zeta_0 \exp \left[i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{l^2} \right] = \zeta_0 l \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{l^2}{4}(k_0 - k)^2 \right]$$

Ширина этого распределения $1/l$. Рассмотрим сначала предел узкого пакета, т. е. квазимонохроматической волны с $k_0 l \gg 1$, для которой можно разложить

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega' + (k - k_0)^2\omega''/2 \quad (3.18)$$

и подставить в

$$\zeta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \zeta(k, 0) \exp[ikx - i\omega_k t] \approx \quad (3.19)$$

$$\approx \frac{\zeta_0 l}{2} e^{ik_0 x - i\omega_0 t} [l^2/4 + it\omega''/2]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - \omega' t)^2}{(l^2 + 2it\omega'')} \right]. \quad (3.20)$$

$$\zeta(k, 0) = \int dx \zeta_0 \exp \left[i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{l^2} \right] = \zeta_0 l \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{l^2}{4}(k_0 - k)^2 \right]$$

Ширина этого распределения $1/l$. Рассмотрим сначала предел узкого пакета, т. е. квазимонохроматической волны с $k_0 l \gg 1$, для которой можно разложить

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega' + (k - k_0)^2\omega''/2 \quad (3.18)$$

и подставить в

$$\zeta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \zeta(k, 0) \exp[ikx - i\omega_k t] \approx \quad (3.19)$$

$$\approx \frac{\zeta_0 l}{2} e^{ik_0 x - i\omega_0 t} [l^2/4 + it\omega''/2]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - \omega' t)^2}{(l^2 + 2it\omega'')} \right]. \quad (3.20)$$

Как видим, возмущение $\zeta(x, t) = \exp(i k_0 x - i \omega_0 t) \Psi(x, t)$ есть монохроматическая волна с комплексной огибающей, модуль которой

$$|\Psi(x, t)| \approx \zeta_0 \frac{l}{L(t)} \exp \left[-(x - \omega' t)^2 / L^2(t) \right],$$

$$L(t) = [l^4 + (t\omega''/2)^2]^{1/4}. \quad (3.21)$$

$$|\Psi(x, t)| \approx \zeta_0 \frac{l}{L(t)} \exp \left[-(x - \omega' t)^2 / L^2(t) \right],$$

$$L(t) = [l^4 + (t\omega''/2)^2]^{1/4}. \quad (3.21)$$

Фаза волны распространяется с *фазовой скоростью* ω_0/k_0 , тогда как огибающая (и энергия, задаваемая $|\Psi|^2$) распространяются с *групповой скоростью* ω' . Максимум пакета находится в точке $x = \omega' t$, потому что здесь интерференция волн с близкими частотами конструктивна, а вдали от этой точки волны гасят друг друга. Для звуковых волн $\omega_k = ck$, так что групповая и фазовая скорости совпадают и одинаковы для всех гармоник; волновой пакет не расплывается в пространстве, поскольку $\omega'' = 0$. Напротив, если $\omega'' \neq 0$, волны называются диспергирующими, поскольку разные гармоники двигаются с разными скоростями, что приводит к разбеганию (дисперсии) в пространстве: пакет расплывается и амплитуда уменьшается вследствие роста $L(t)$. Для $\omega_k \propto k^\alpha$ имеем $\omega' = \alpha\omega_k/k$. В частности, групповая скорость гравитационных волн на поверхности глубокой воды вдвое меньше фазовой скорости, что можно наблюдать, следя за волновыми горбами, возникающими ниоткуда в хвосте пакета и исчезающими на фронте. Для капиллярных волн на глубокой воде групповая скорость в 1.5 больше, так что горбы возникают на фронте и исчезают сзади.

Групповая скорость волн на поверхности жидкости



$$\omega = \sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}$$

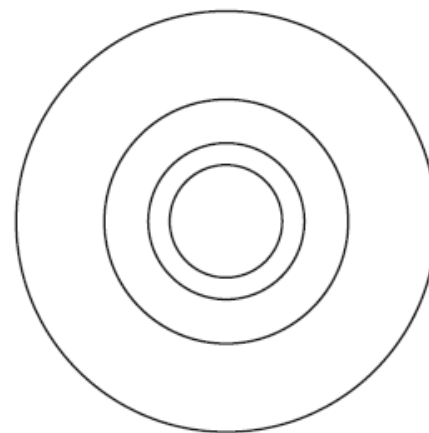
$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3k^2 \alpha / \rho}{2\sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}}$$

Групповая скорость волн на поверхности жидкости

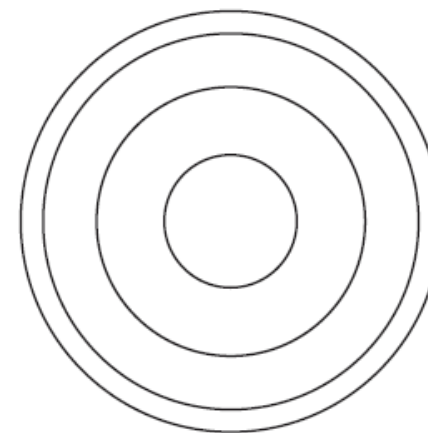


$$\omega = \sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3k^2 \alpha / \rho}{2\sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}}$$



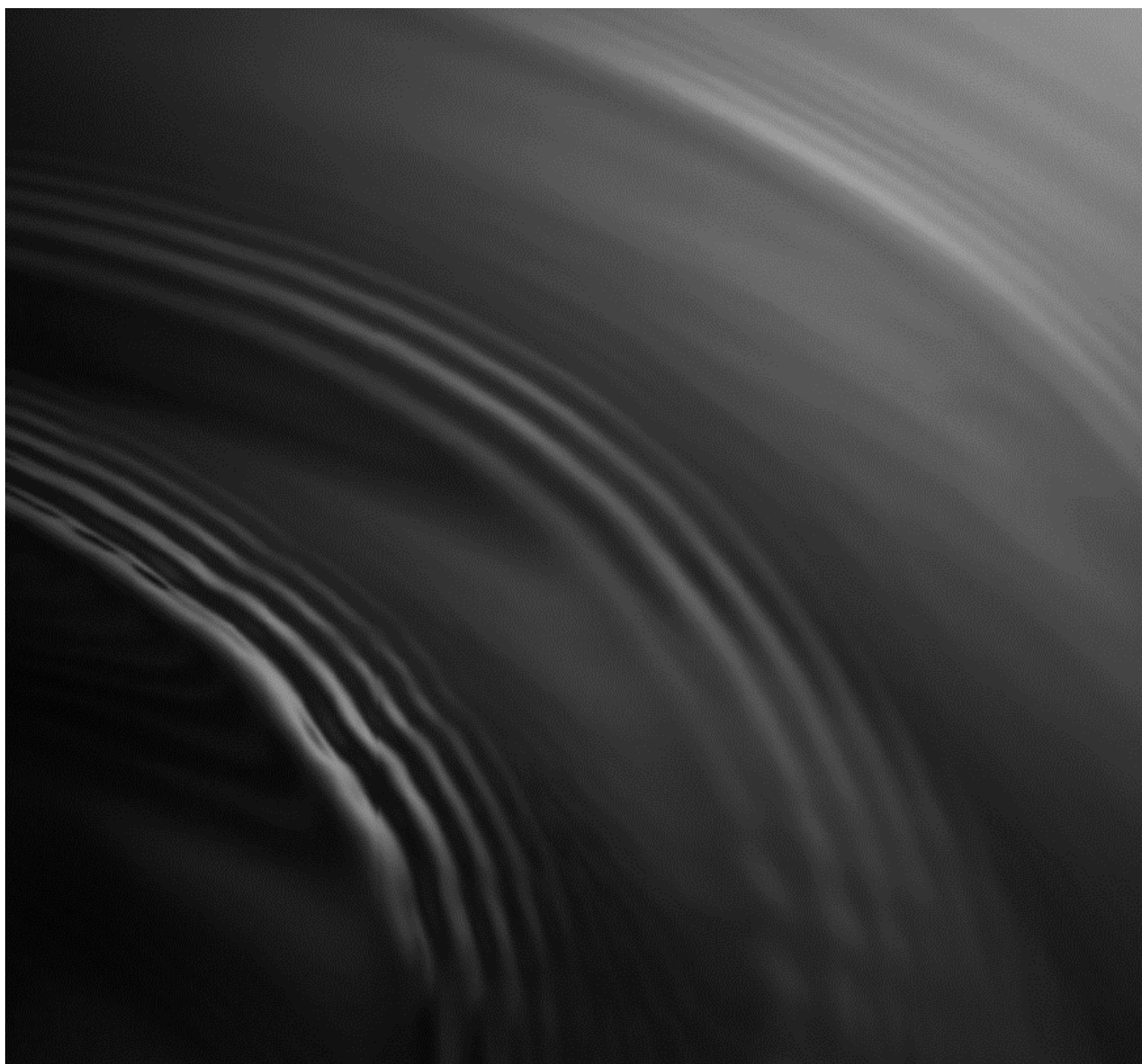
гравитационные волны

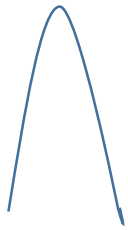


капиллярные волны

картина разбегающихся волн

Нет волн, бегущих медленнее, чем $v_* \simeq (g\alpha/\rho)^{1/4} \simeq 17$ см/с, поэтому нет внутри круга радиуса $v_* t$; этот круг является каустикой.





Рассмотрим теперь начальное возмущение, локализованное в пространстве. Ему соответствует широкое распределение в k -пространстве, так что фазы многих гармоник коррелированы для создания конструктивной интерференции внутри узкой области и взаимного погашения снаружи. Для диспергирующих волн ($\omega'' \neq 0$) с течением времени гармоники разбегаются и через некоторое время в разных местах будут наблюдаться периодические волны с разными длинами. Действительно, для данного x , t главный вклад в интеграл (3.19) дается экстремумом экспоненты, т. е. условием стационарной фазы $d\omega/dk = x/t$: гармоники с такими волновыми векторами имеют близкие фазы и складываются, а вклады остальных гармоник взаимно погашаются. Иными словами, волна с волновым числом k наблюдается в месте, движущемся с групповой скоростью $d\omega/dk$.

$$\zeta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \zeta(k, 0) \exp[ikx - i\omega_k t] \approx \frac{1}{2} e^{ik_c x - i\omega(k_c) t} [it\omega''(k_c)/2]^{-1/2}$$

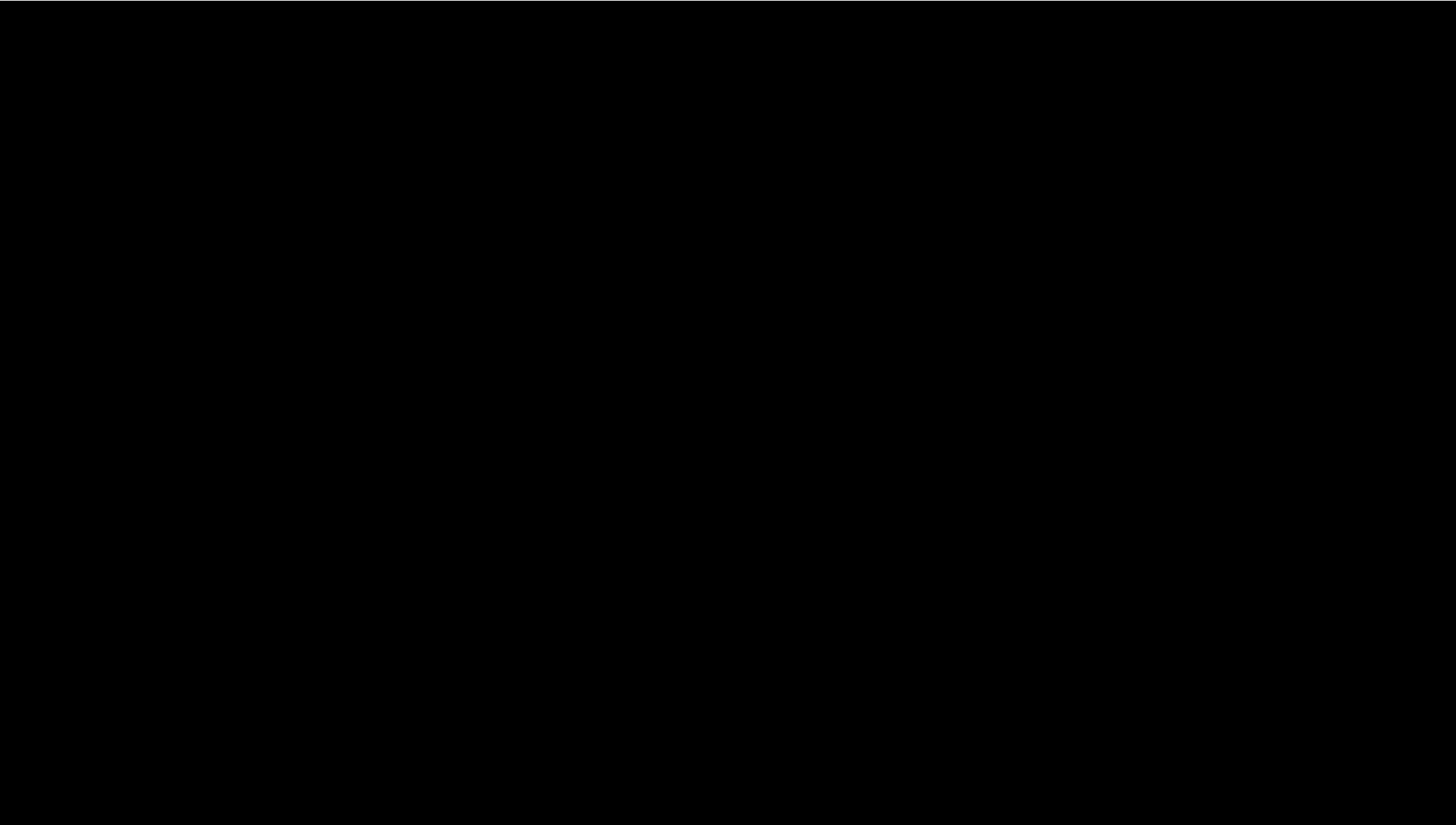
$$\omega'(k_c) = x/t$$

Рассмотрим точку, где $k_c(x, t) = k_*$ $\omega''(k_*) = 0$. Это точка является каустикой — границей между областями с двумя группами волн и без волн совсем.



Фазовая и групповая скорости

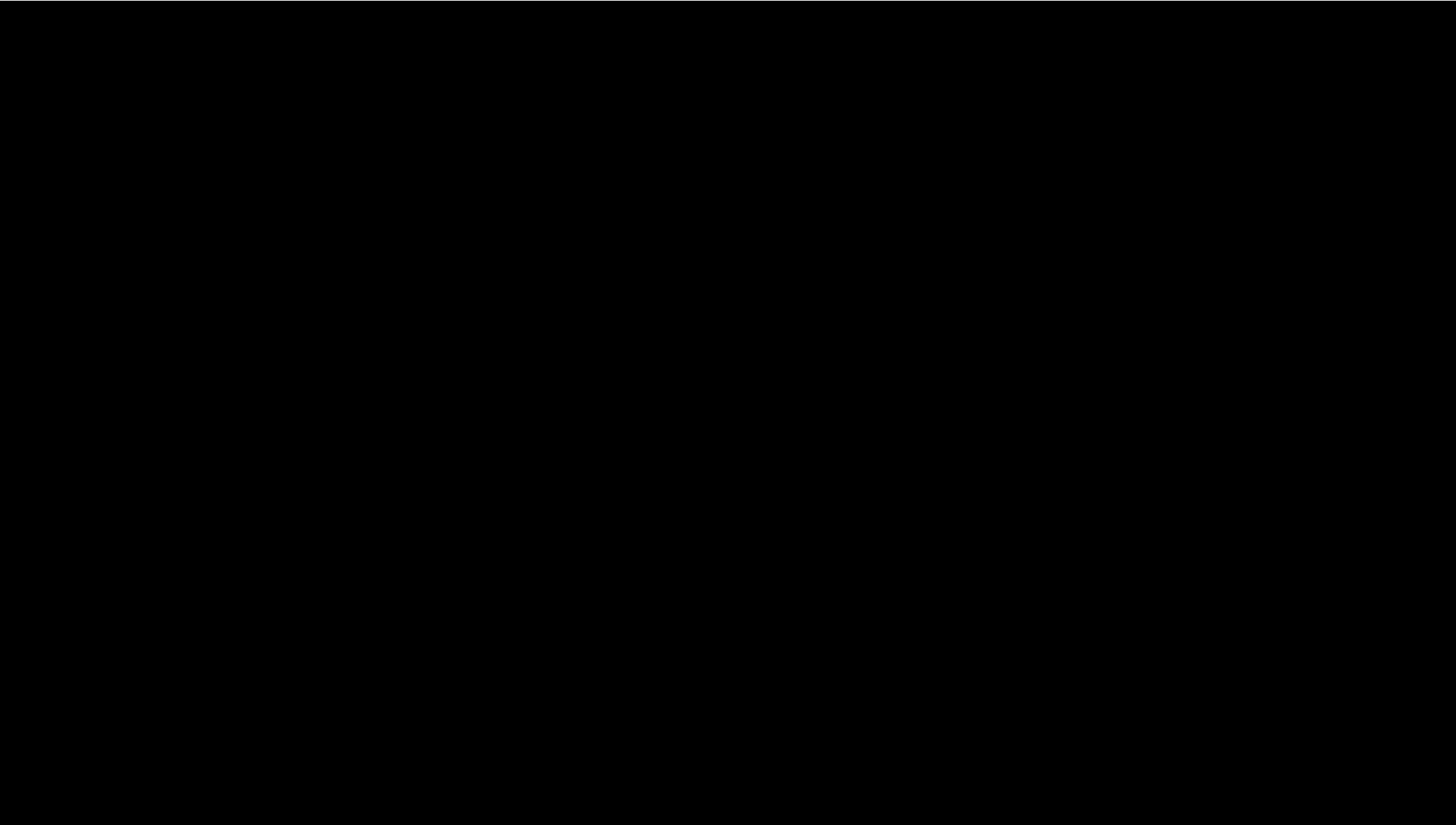
1 Сумма двух волн



Фазовая и групповая скорости

2 Произведение двух волн

https://www.youtube.com/watch?v=uii9clp_DSg&feature=youtu.be



Возбуждение волн

Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна **фазовой скорости или групповой скорости?**

Возбуждение волн

Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна **фазовой скорости** $c(k) = \omega(k)/k$.

Например, если источник создает возвышение поверхности жидкости, то он должен все время совпадать с одним из горбов волны, которые все двигаются с фазовой скоростью. Условие $\mathbf{V} \cos \theta = c$, необходимое для генерации стационарной волны, является аналогом критерия Ландау возбуждения возмущений в сверхтекучей жидкости и резонансного условия для генерации излучения Вавилова – Черенкова частицами, движущимися быстрее света в среде.

Возбуждение волн

Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна фазовой скорости $c(k) = \omega(k)/k$.

Например, если источник создает возвышение поверхности жидкости, то он должен все время совпадать с одним из горбов волны, которые все двигаются с фазовой скоростью. Условие $V \cos \theta = c$, необходимое для генерации стационарной волны, является аналогом критерия Ландау возбуждения возмущений в сверхтекучей жидкости и резонансного условия

для генерации излучения Вавилова – Черенкова частицами, движущимися быстрее света в среде.

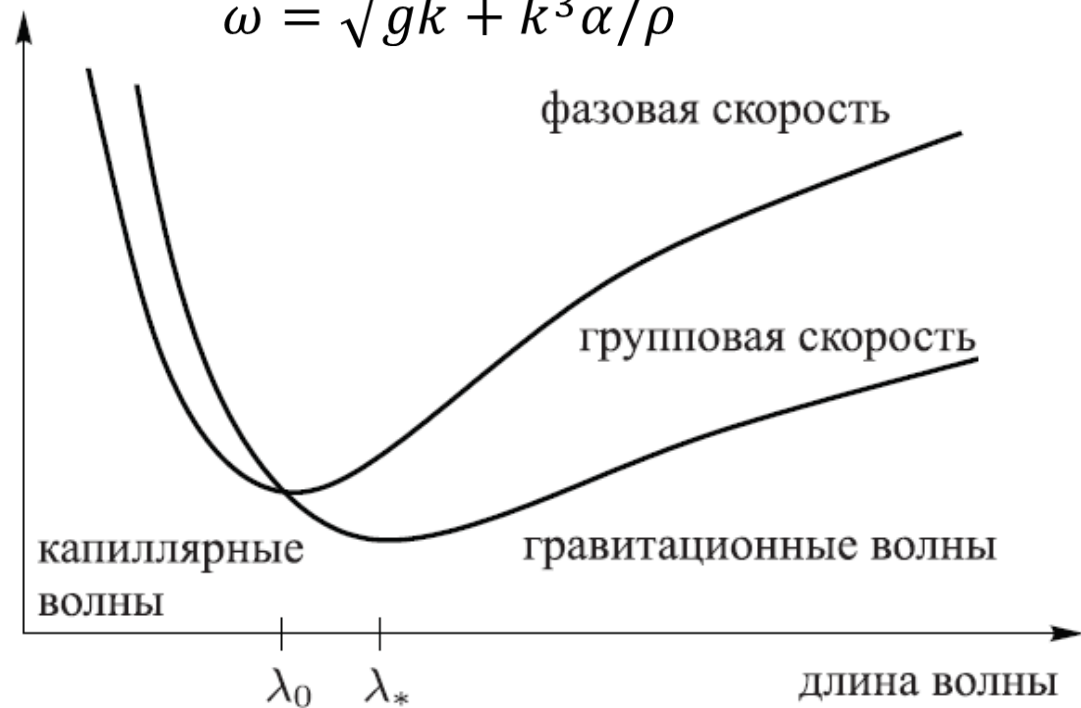
Для волн на глубокой воде условие резонанса означает, что скорость источника V должна превышать минимальную фазовую скорость $c(k_0)$.

Минимальная фазовая скорость определяет пороговую скорость для генерации волн.

Минимальная групповая скорость определяет что?

$$c(k_0) = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \left(\frac{4\alpha g}{\rho} \right)^{1/4} \simeq 23 \text{ см/с.}$$

$$\omega = \sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}$$



Возбуждение волн

Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна фазовой скорости $c(k) = \omega(k)/k$.

Например, если источник создает возвышение поверхности жидкости, то он должен все время совпадать с одним из горбов волны, которые все двигаются с фазовой скоростью. Условие $V \cos \theta = c$, необходимое для генерации стационарной волны, является аналогом критерия Ландау возбуждения возмущений в сверхтекучей жидкости и резонансного условия

для генерации излучения Вавилова – Черенкова частицами, движущимися быстрее света в среде.

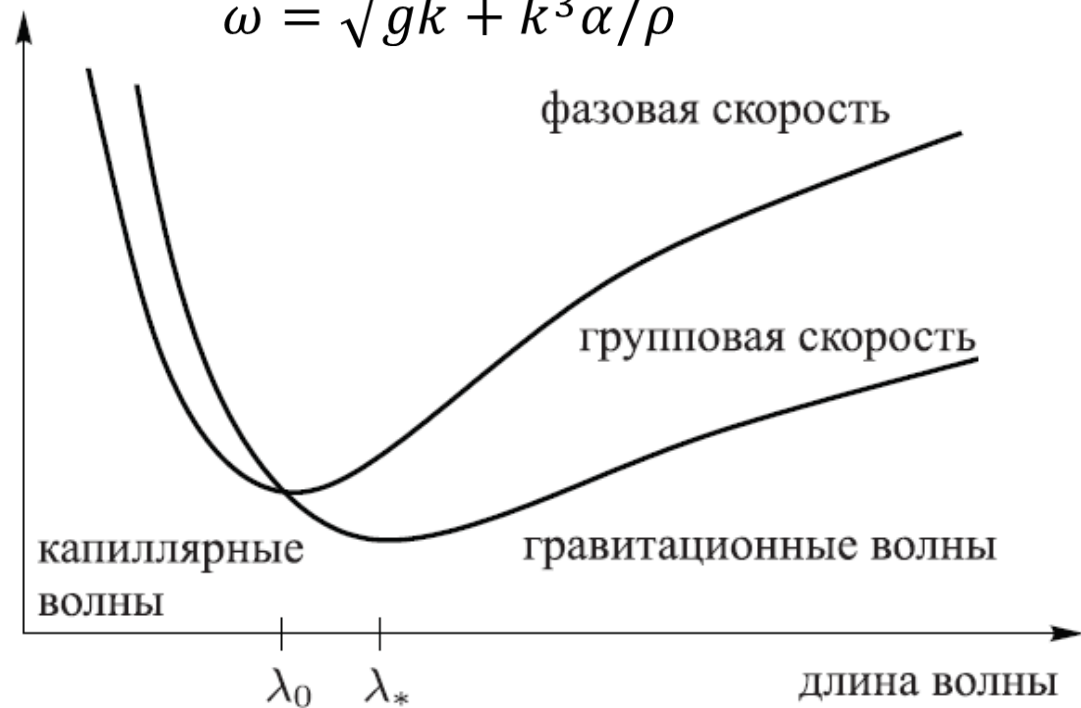
Для волн на глубокой воде условие резонанса означает, что скорость источника V должна превышать минимальную фазовую скорость $c(k_0)$.

Минимальная фазовая скорость определяет пороговую скорость для генерации волн.

Минимальная групповая скорость определяет скорость каустики.

$$c(k_0) = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \left(\frac{4\alpha g}{\rho} \right)^{1/4} \simeq 23 \text{ см/с.}$$

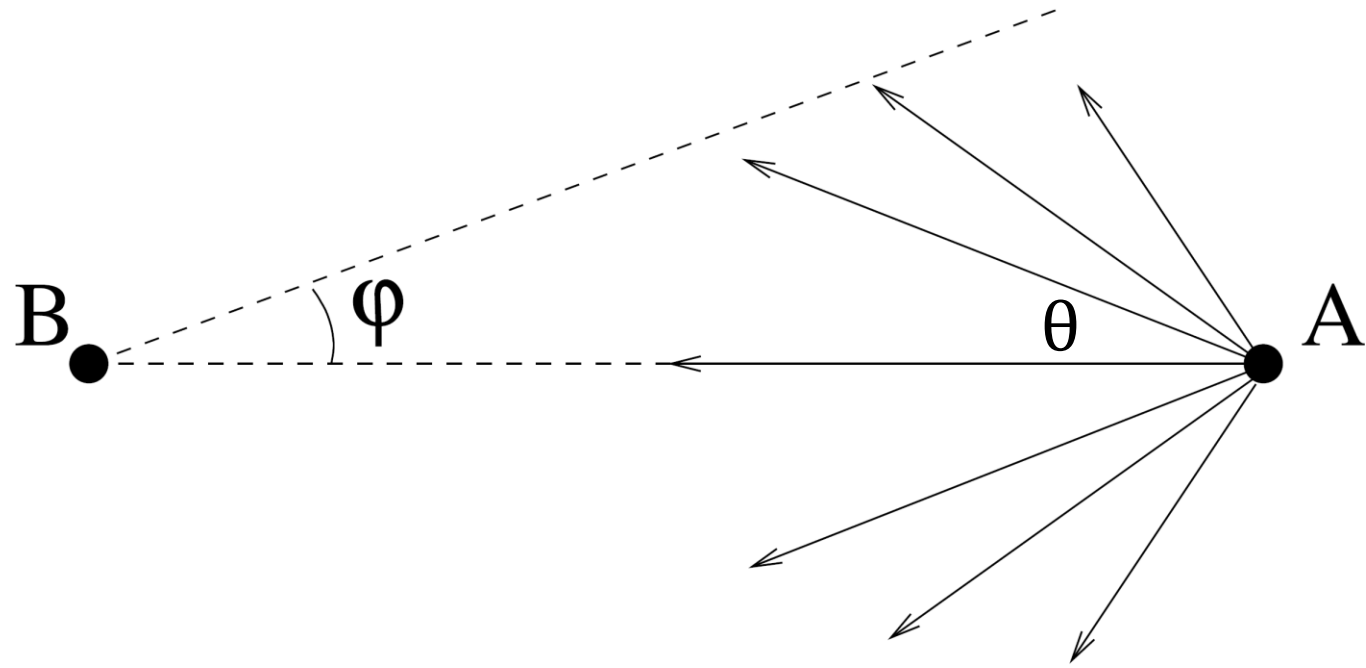
$$\omega = \sqrt{gk + k^3 \alpha / \rho}$$





Волны от корабля

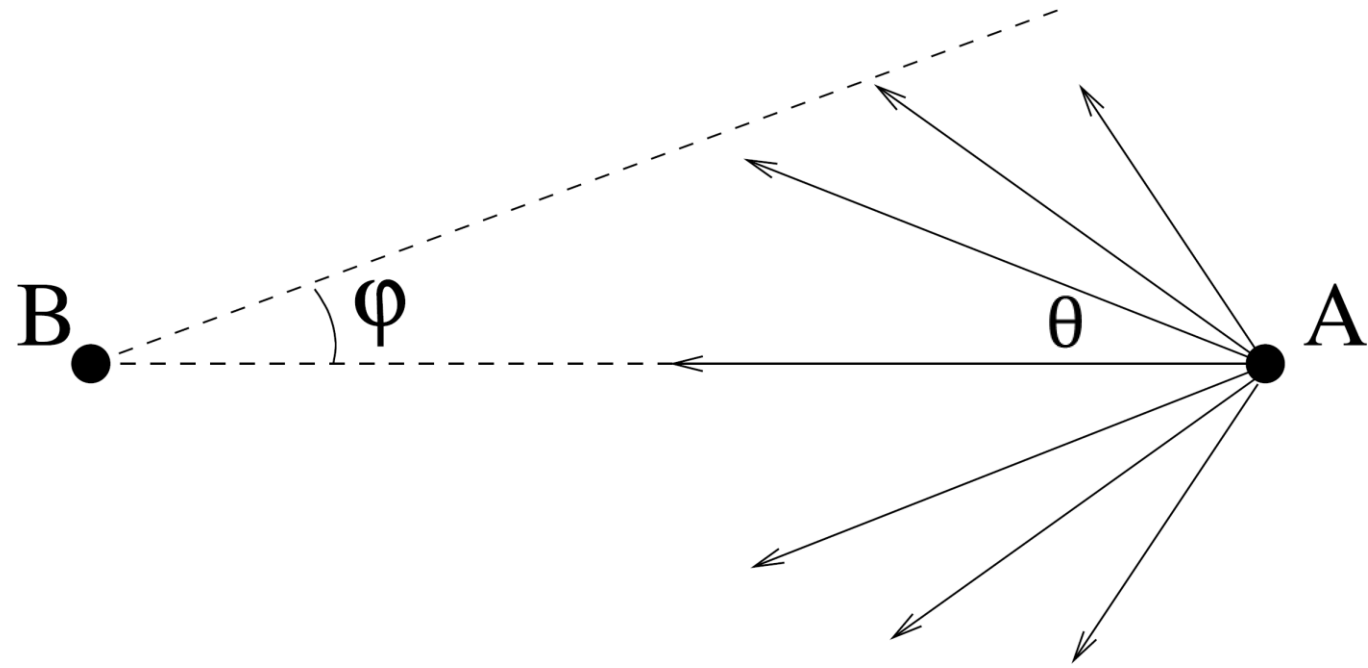
Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна фазовой скорости $c(k) = \omega(k)/k$. Длина волны, уходящей под углом ϑ к движению корабля, задается условием $V \cos \vartheta = c(k)$, необходимым, чтобы нос корабля все время оставался на гребне волны. Это условие означает, что волны разных длин распространяются под разными углами в интервале $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$.



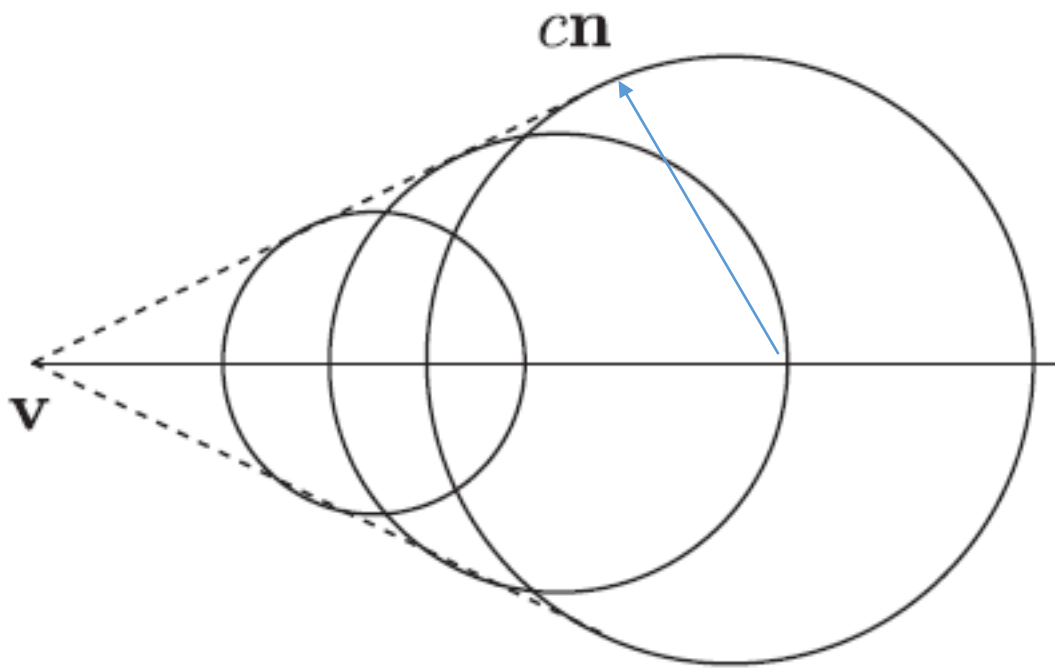
Волны от корабля

Источник волн, движущийся относительно жидкости, может возбуждать стационарную волну, если проекция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна фазовой скорости $c(k) = \omega(k)/k$. Длина волны, уходящей под углом ϑ к движению корабля, задается условием $V \cos \vartheta = c(k)$, необходимым, чтобы нос корабля все время оставался на гребне волны. Это условие означает, что волны разных длин распространяются под разными углами в интервале $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$.

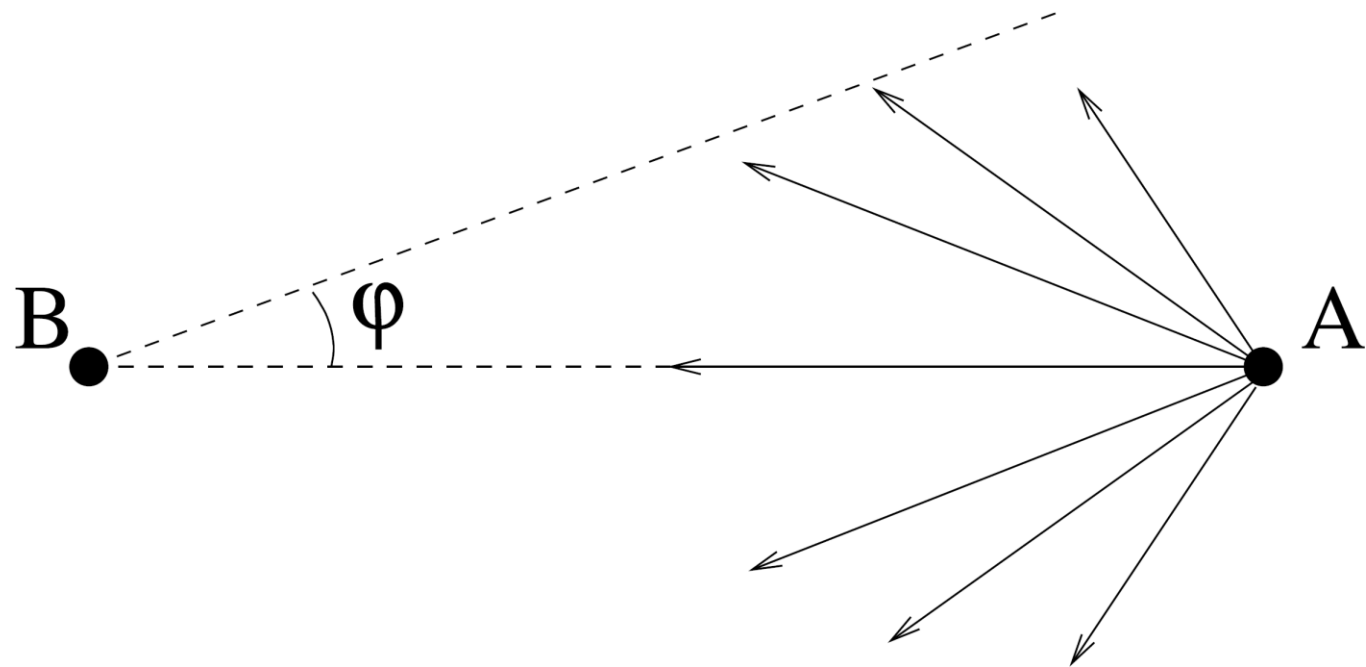
Подобно рассмотрению конуса Маха, найдем геометрическое место точек, куда придут волны, возбужденные кораблем в точке А к тому времени, когда сам корабль сместится в точку В



Звук, изотропно возбуждаемый источником движущимся со сверхзвуковой скоростью
конус Маха



Волны от корабля, длина волны (и скорость) которых зависят от направления
угол Кельвина



Волны от корабля

Гравитационные волны распространяются от источника с групповой скоростью $c(k)/2 = V \cos \vartheta/2$.

Самая быстрая волна бежит вслед за кораблем ($\vartheta = 0$) с групповой скоростью, равной половине скорости корабля, и достигает А такой, что $AA' = AB/2$.

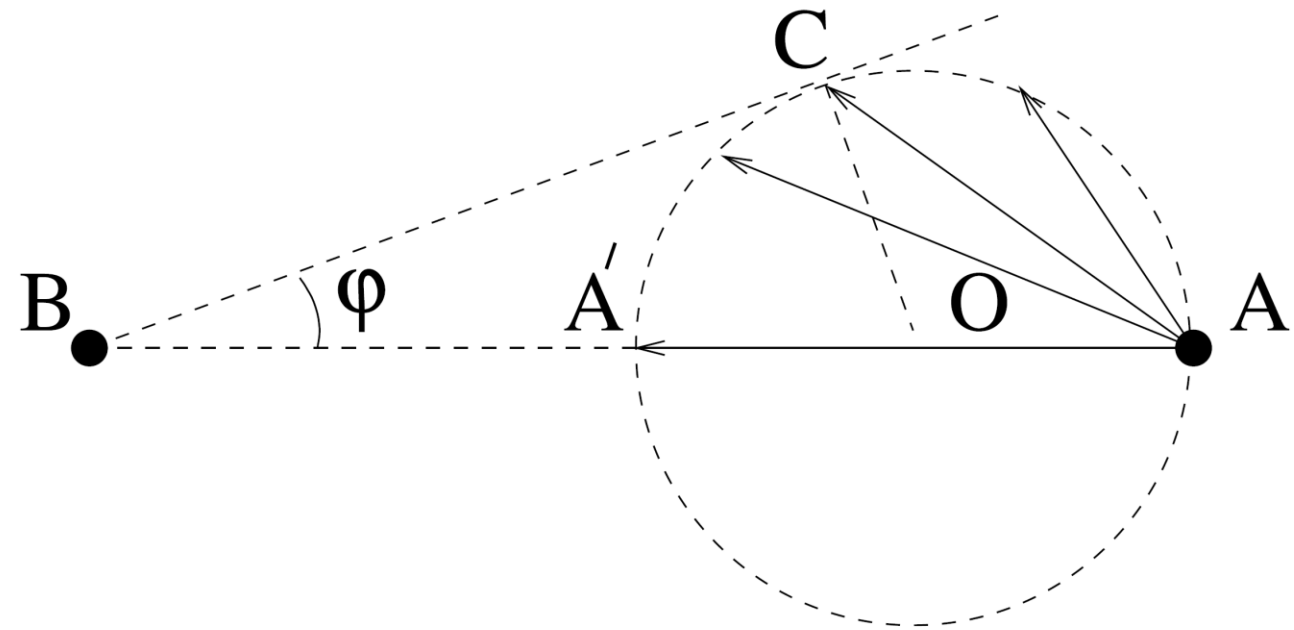


Рис. 3.3. Картина волн, возбуждаемых кораблем, плывущим вдоль оси x влево. Изображенный круг есть геометрическое место точек, которых волны, возбужденные кораблем в А, достигнут в момент времени, когда корабль переместится в В. Пунктирная линия показывает угол Кельвина. Сплошные линии — поверхности постоянной фазы (гребни) волн.

Волны от корабля

Гравитационные волны распространяются от источника с групповой скоростью $c(k)/2 = V \cos \vartheta/2$.

Самая быстрая волна бежит вслед за кораблем ($\vartheta = 0$) с групповой скоростью, равной половине скорости корабля, и достигает А такой, что $AA' = AB/2$.

Волна, бегущая под углом ϑ , достигает точки Е такой, что $AE = A'A \cos \vartheta$, что означает, что угол $A'EA$ прямой.

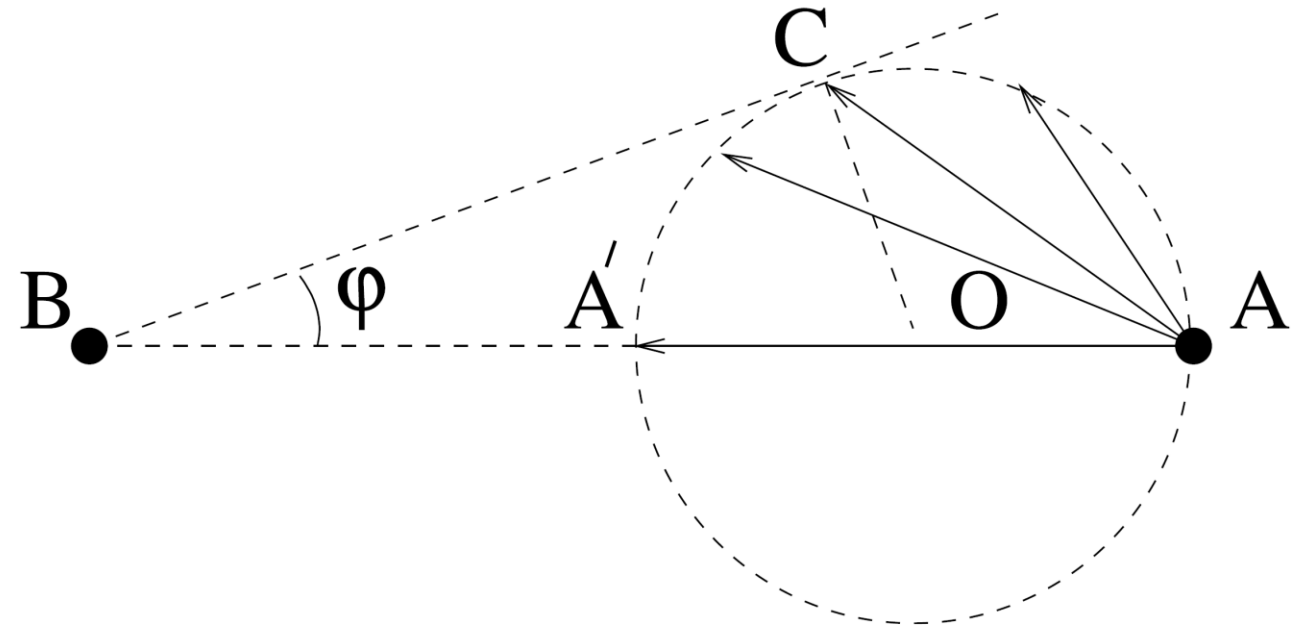
Множество точек Е, соответствующим всем

углам $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, составляет **круг** диаметра AA' , что и есть геометрическое место точек, достигнутых волнами, излученными из А под разными углами.

Поскольку $OC = OA = OB/3$, все волны, возбужденные до того, как корабль достиг В, находятся внутри *клина Кельвина* с углом $\phi = \arcsin(1/3)$.

Замечательно, что *угол Кельвина не зависит от скорости корабля*, в отличие от конуса Маха.

Рис. 3.3. Картина волн, возбуждаемых кораблем, плывущим вдоль оси x влево. Изображенный круг есть геометрическое место точек, которых волны, возбужденные кораблем в А, достигнут в момент времени, когда корабль переместится в В. Пунктирная линия показывает угол Кельвина. Сплошные линии — поверхности постоянной фазы (гребни) волн.



Волны от корабля

Опишем теперь форму линий постоянной фазы (гребней и впадин). Они возникают в результате сложения волн, излученных в разные моменты под разными углами. Рассмотрим точку E, находящуюся на гребне волны, излученной из точки $X = BA$ и распространяющейся под углом ϑ . Для разных точек гребня (например, от E к D) разными являются точка излучения X и угол ϑ , но должна оставаться неизменной фаза,

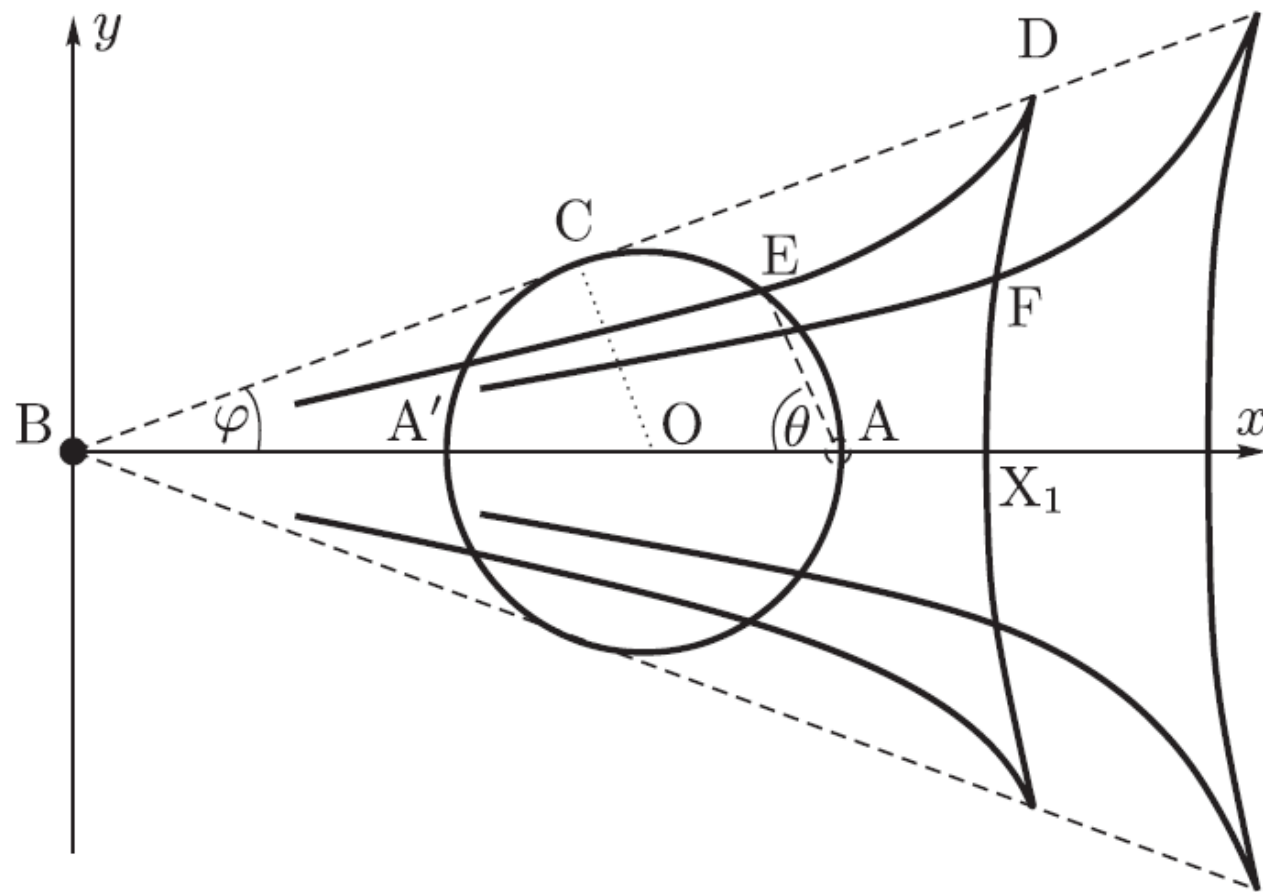
то есть время с момента излучения. Пока корабль прошел X , волна прошла $(X \cos \vartheta)/2$.

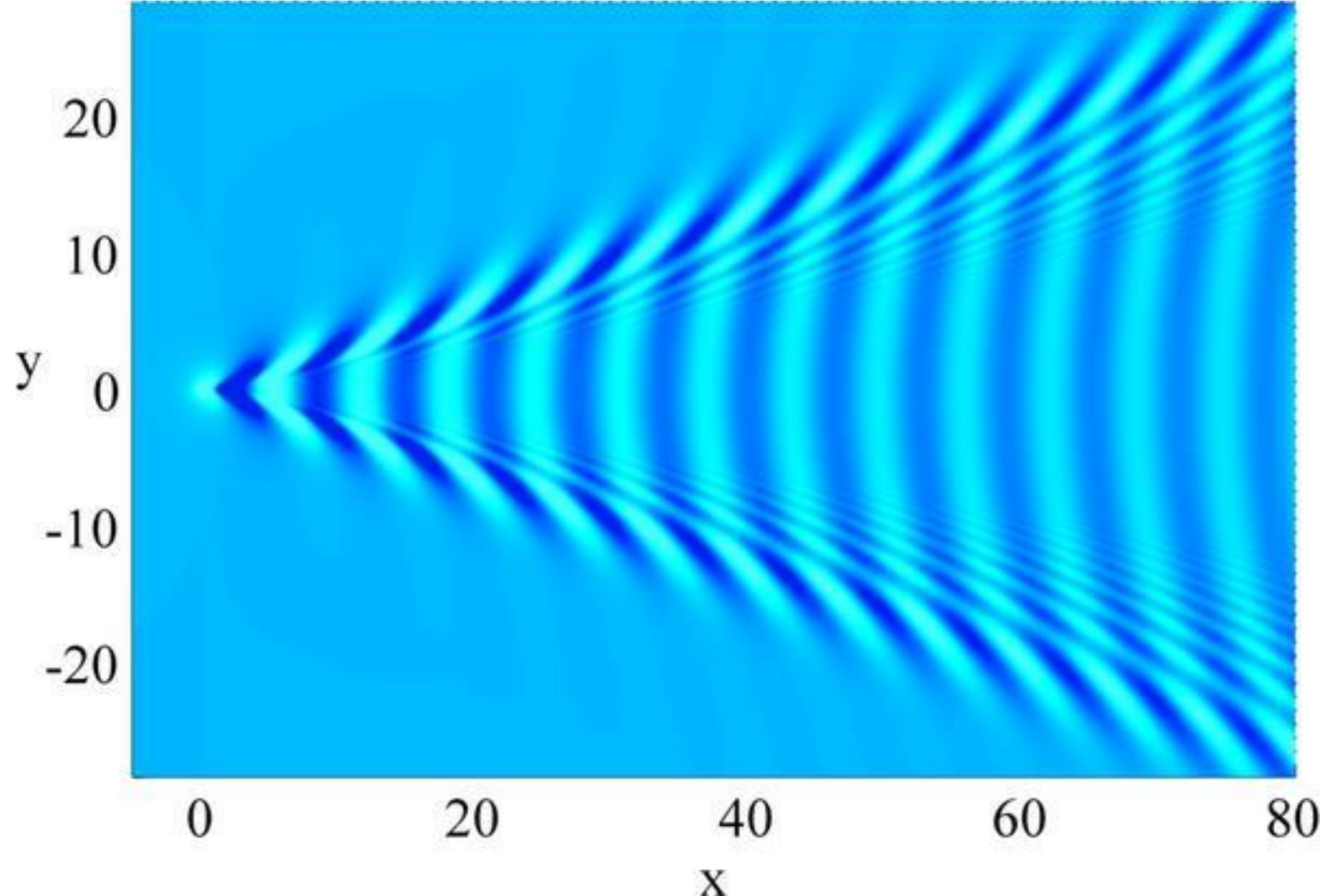
Изменение проходимого волной расстояния $d(X \cos \vartheta)/2 = dX \cos \vartheta/2 - X \sin \vartheta d\vartheta/2$, деленное на фазовую скорость $V \cos \vartheta$, дает изменение времени прохождения волны, которое должно равняться времени движения корабля dX/V .

Уравнение $dX = -X \tan \vartheta d\vartheta$ имеет решение $X = X_1 \cos \vartheta$, которое связывает координату источника X с углом распространения ϑ . Разные константы интегрирования X_1 соответствуют разным гребням. Координаты E в системе координат с началом в B есть

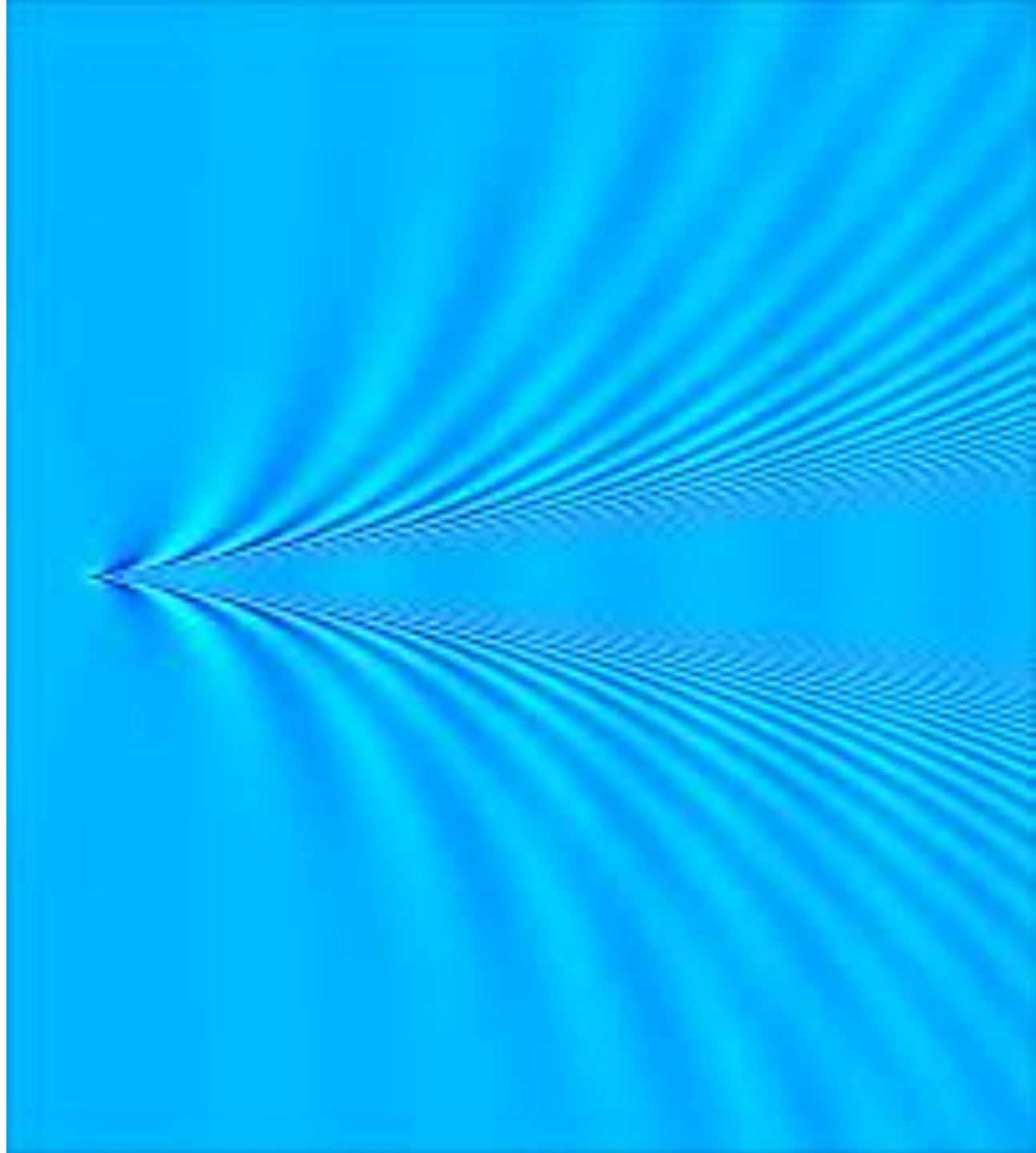
$$x = \frac{X}{2} (2 - \cos^2 \theta) = \frac{X_1}{2} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta),$$

$$y = \frac{X}{4} \sin 2\theta = \frac{X_1}{4} \cos \theta \sin 2\theta.$$



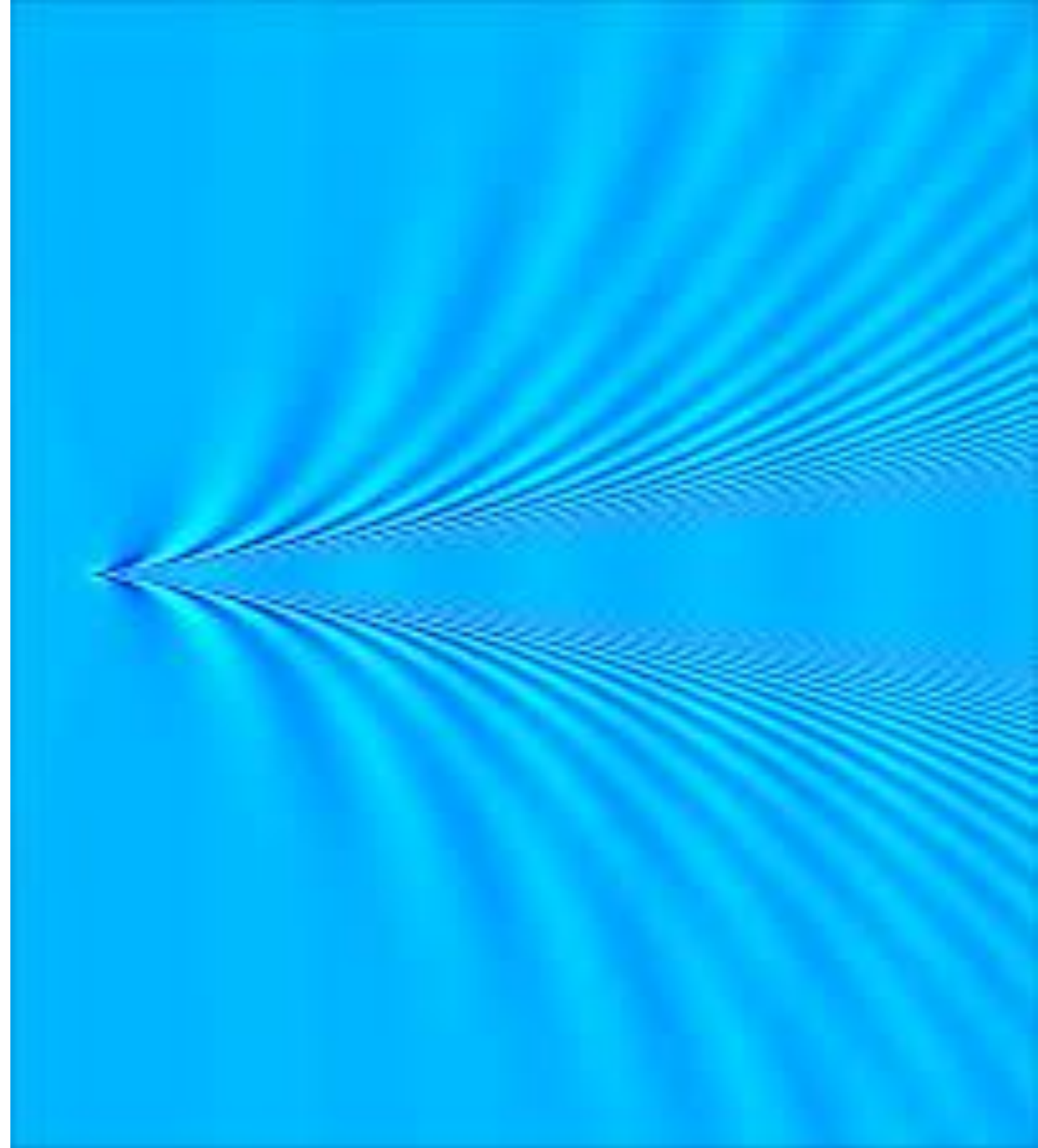


А почему здесь волны не
ограничены углом Кельвина?



А почему здесь волны не
ограничены углом Кельвина?

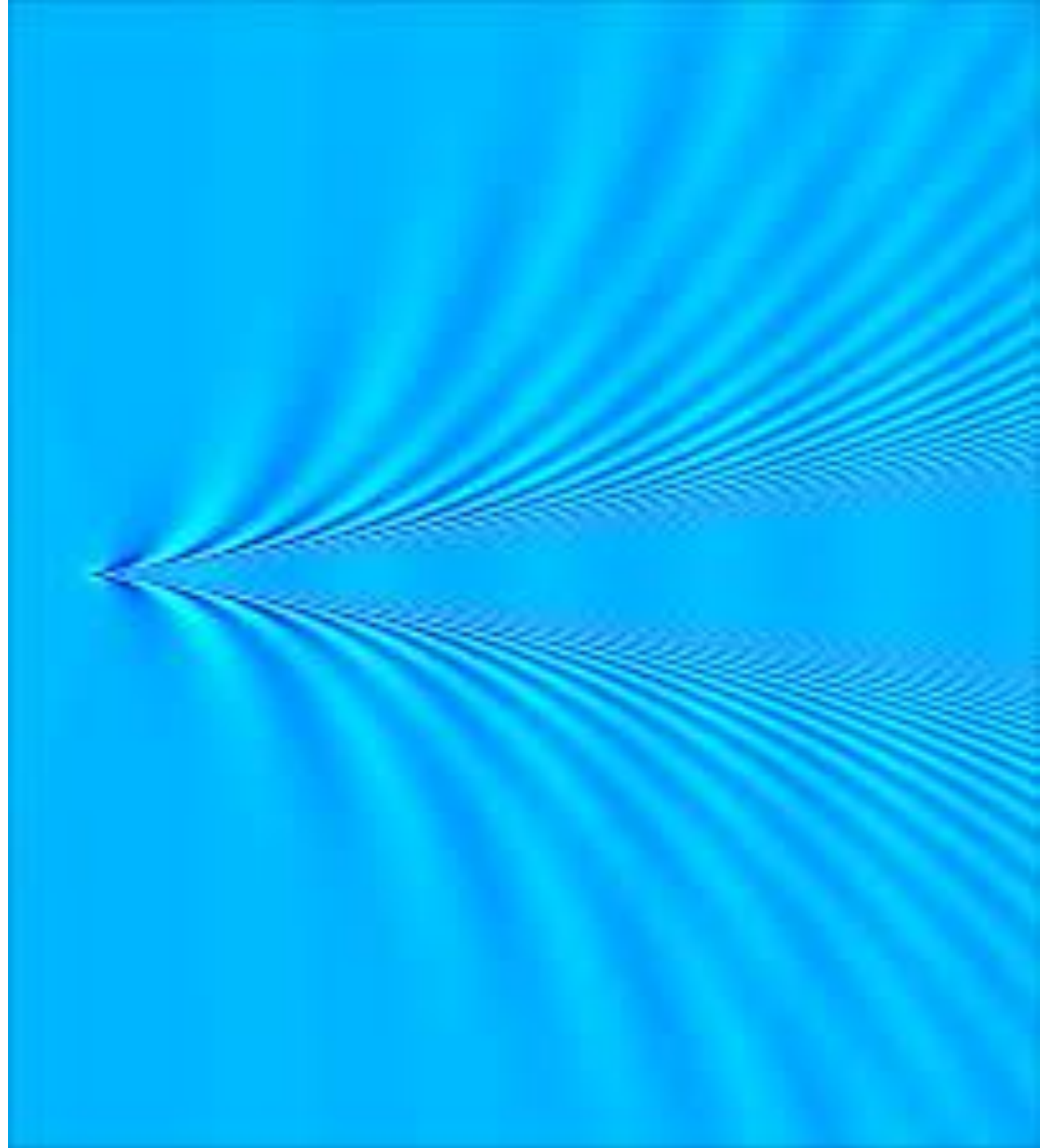
Короткие волны ограничены,
а длинные - нет.



А почему здесь волны не ограничены углом Кельвина?

Короткие волны ограничены, а длинные - нет.

Причина — в конечной глубине жидкости. Волны длиннее глубины выходят наружу.





Максимум волновой амплитуды соответствует волне, половина длины волны которой порядка длины корабля.

Нелинейные волны

В линейном приближении волны с разными волновыми векторами не взаимодействуют, так что в бесконечном пространстве комплексные фурье-амплитуды a_k являются нормальными каноническими переменными, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k = -i \frac{\partial H}{\partial a_k^*}$$

$$H_2 = \sum_k \omega_k |a_k|^2$$

А как будет выглядеть первый нелинейный член в гамильтониане?

Нелинейные волны

В линейном приближении волны с разными волновыми векторами не взаимодействуют, так что в бесконечном пространстве комплексные фурье-амплитуды a_k являются нормальными каноническими переменными, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k = -i \frac{\partial H}{\partial a_k^*}$$

$$H_2 = \sum_k \omega_k |a_k|^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = \int & \left[(V_{123} a_1^* a_2 a_3 + \text{c.c.}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \right. \\ & \left. + (U_{123} a_1^* a_2^* a_3^* + \text{c.c.}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned}$$

Дельта-функции выражают сохранение импульса и возникают из-за однородности пространства. Действительно, H_2 и H_3 являются соответственно фурье-представлениями интегралов типа

$$\int \Omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

и

$$\int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$

Для того чтобы проявить физический смысл отдельных членов гамильтониана, запишем следующее из него уравнение движения (куда мы также включили линейное затухание, что следует делать всегда, когда возможны резонансы):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} = & -3i \int U_{k12} a_1^* a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - i \int V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - 2i \int V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - (\gamma_k + i\omega_k) a_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_k}{\partial t} = & -3\imath \int U_{k12} a_1^* a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\
& - \imath \int V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\
& - 2\imath \int V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - (\gamma_k + \imath \omega_k) a_k,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

когда возможны резонансы). Дельта-функции в интегралах свидетельствуют, что каждое из слагаемых описывает взаимодействие разных триплетов волн. Это можно продемонстрировать явно, рассмотрев частный вид начального условия, в котором присутствуют только две волны соответственно с волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, частотами ω_1, ω_2 и конечными амплитудами A_1, A_2 . Тогда последний нелинейный член в (3.35) имеет вид $-2\imath e^{\imath(\omega_2 - \omega_1)t} V_{1k2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})$, т. е. действует на волну с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ периодической силой с частотой $\omega_1 - \omega_2$. Таким же образом можно описать и действие других членов в (3.35). Под действием этих сил вынужденное решение (3.35) имеет вид

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{k}, t) = & -3\imath e^{\imath(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{U_{k12} A_1^* A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k})}{\gamma_k + \imath(\omega_1 + \omega_2 + \omega_k)} - \\
& - \imath e^{-\imath(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{V_{k12} A_1 A_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\gamma_k + \imath(\omega_1 + \omega_2 - \omega_k)} - \\
& - 2\imath e^{\imath(\omega_2 - \omega_1)t} \frac{V_{1k2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}{\gamma_k + \imath(\omega_k + \omega_2 - \omega_1)}.
\end{aligned}$$

Интуитивно ясно, что нерезонансные члены не важны при малой нелинейности. Поэтому их следует исключить из гамильтониана, используя канонические преобразования. Поскольку эти члены малы, преобразование должно быть близко к идентичному. Рассмотрим некоторое непрерывное распределение a_k . Чтобы избавиться от слагаемого с U в $\mathcal{H}_3$, надо сделать такое преобразование:

$$b_k = a_k - 3 \int \frac{U_{k12} a_1^* a_2^*}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_k} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (3.36)$$

Это возможно, если знаменатель нигде не обращается в ноль в области интегрирования, что имеет место, в частности, для всех сред, находившихся в термодинамическом равновесии до возбуждения волн. Гамильтониан $\mathcal{H}\{b, b^*\} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ уже не содержит слагаемого с U . Избавление от V -членов осуществляется похожим преобразованием

$$b_k = a_k + \int \left[\frac{V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{2k1}^* a_1^* a_2 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})}{\omega_2 - \omega_1 - \omega_k} \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (3.37)$$

Если все трех-волновые распады $1 \rightarrow 2+3$ нерезонансны, то таковыми являются и четырех-волновые распады $1 \rightarrow 2+3+4$. Единственное, что остается, — это рассеяние пар $1+2 \rightarrow 3+4$, для которого всегда можно найти резонансные волны. Рассеяние описывается гамильтонианом:

$$\mathcal{H}_4 = \int T_{1234} a_1 a_2 a_3^* a_4^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$$

Волновое движение может быть неустойчивым. Покажем, что монохроматическая волна с распадным законом дисперсии при достаточно большой амплитуде подвержена неустойчивости, называемой (естественно) распадной. Рассмотрим начальное состояние в виде волны конечной амплитуды $A \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)]$ и двух инфинитезимальных возмущений a_1, a_2 в пространственном резонансе $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Оставим только резонансные члены

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} = & -3i \int U_{k12} a_1^* a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - i \int V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - 2i \int V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \end{aligned}$$

Волновое движение может быть неустойчивым. Покажем, что монохроматическая волна с распадным законом дисперсии при достаточно большой амплитуде подвержена неустойчивости, называемой (естественно) распадной. Рассмотрим начальное состояние в виде волны конечной амплитуды $A \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)]$ и двух инфинитезимальных возмущений a_1, a_2 в пространственном резонансе $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Оставим только резонансные члены в (3.35):

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 + (\gamma_1 + i\omega_1)a_1 + 2iV_{k12}Aa_2^* \exp(-i\omega_k t) &= 0, \\ \dot{a}_2^* + (\gamma_2 - i\omega_2)a_2^* + 2iV_{k12}^*A^*a_1 \exp(i\omega_k t) &= 0.\end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$a_1(t) \propto \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t), \quad a_2^*(t) \propto \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t).$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 + (\gamma_1 + i\omega_1)a_1 + 2iV_{k12}Aa_2^* \exp(-i\omega_k t) &= 0, \\ \dot{a}_2^* + (\gamma_2 - i\omega_2)a_2^* + 2iV_{k12}^*A^*a_1 \exp(i\omega_k t) &= 0.\end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$a_1(t) \propto \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t), \quad a_2^*(t) \propto \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t).$$

$$(\Gamma - i\Omega_1 + \gamma_1 + i\omega_1)a_1 \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t) + 2iV_{k12}Aa_2 \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t - i\omega_k t) = 0,$$

$$(\Gamma - i\Omega_2 + \gamma_2 + i\omega_2)a_2 \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t) - 2iV_{k12}Aa_1 \exp(\Gamma t + i\Omega_1 t - i\omega_k t) = 0.$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 + (\gamma_1 + i\omega_1)a_1 + 2iV_{k12}Aa_2^* \exp(-i\omega_k t) &= 0, \\ \dot{a}_2^* + (\gamma_2 - i\omega_2)a_2^* + 2iV_{k12}^*A^*a_1 \exp(i\omega_k t) &= 0.\end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$a_1(t) \propto \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t), \quad a_2^*(t) \propto \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t).$$

$$(\Gamma - i\Omega_1 + \gamma_1 + i\omega_1)a_1 \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t) + 2iV_{k12}Aa_2 \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t - i\omega_k t) = 0,$$

$$(\Gamma - i\Omega_2 + \gamma_2 + i\omega_2)a_2 \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t) - 2iV_{k12}Aa_1 \exp(\Gamma t + i\Omega_1 t - i\omega_k t) = 0.$$

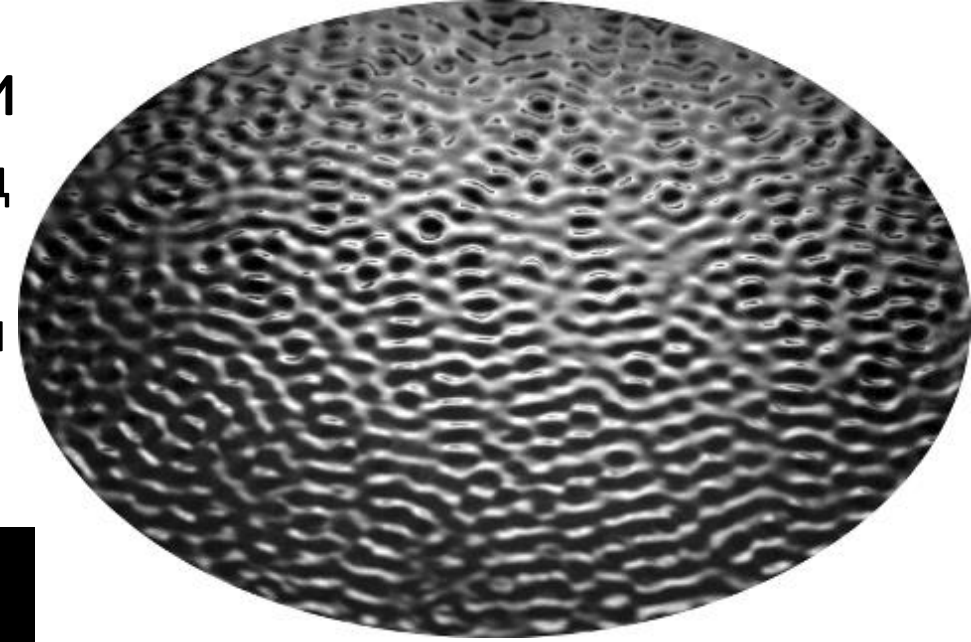
Условие резонанса трех волн во времени имеет вид $\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_k$.

Условие резонанса трех волн во времени имеет вид $\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_k$. Амплитуды волн будут определяться тем, насколько их вынужденные частоты отличаются от их собственных частот, задаваемых дисперсионным соотношением, т. е. разностями $\Omega_1 - \omega_1$ и $\Omega_2 - \omega_2$. Суммарная отстройка двух волн есть $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k$. Следует выбрать $\Omega_{1,2}$, дающие максимальный Γ . Естественно предположить, что 1 и 2 симметричны, так что $\Omega_1 - \omega_1 = \Omega_2 - \omega_2 = \Delta\omega/2$. В простейшем случае $\gamma_1 = \gamma_2$ получим

$$\Gamma = -\gamma \pm \sqrt{4|V_{k12}A|^2 - (\Delta\omega)^2/4}. \quad (3.39)$$

Если дисперсионное соотношение является нераспадным, то $\Delta\omega \simeq \omega_k \gg \gg |VA|$ и нет никакой неустойчивости. Напротив, для распадного закона дисперсии резонанс возможен, $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k = 0$, так что инкремент неустойчивости $\Gamma = 2|V_{k12}A| - \gamma$ положителен, если амплитуда выше пороговой, при которой нелинейность сравнивается с диссипацией: $A > \gamma/2|V_{k12}|$. Быстрее всего растут те a_1, a_2 , частоты которых в резонансе $\Delta\omega = 0$, и отношение $(\gamma_1 + \gamma_2)/|V_{k12}|$ минимально. В частном случае $k = 0$, $\omega_0 \neq 0$, распадная неустойчивость называется параметрической, поскольку

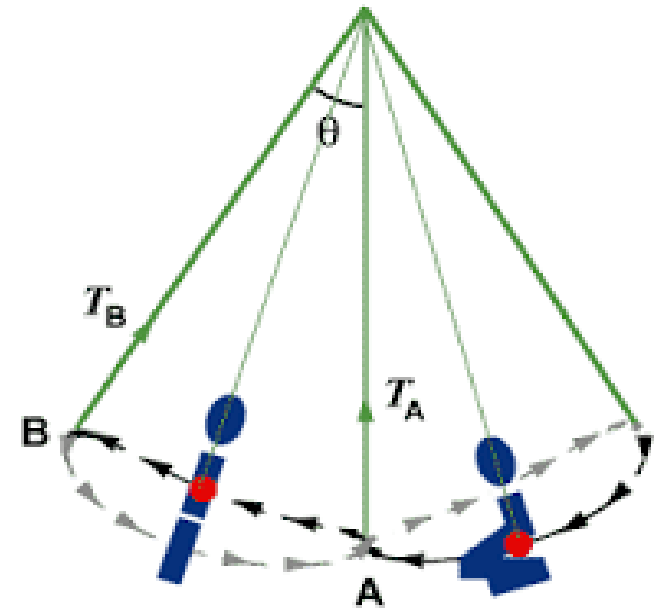
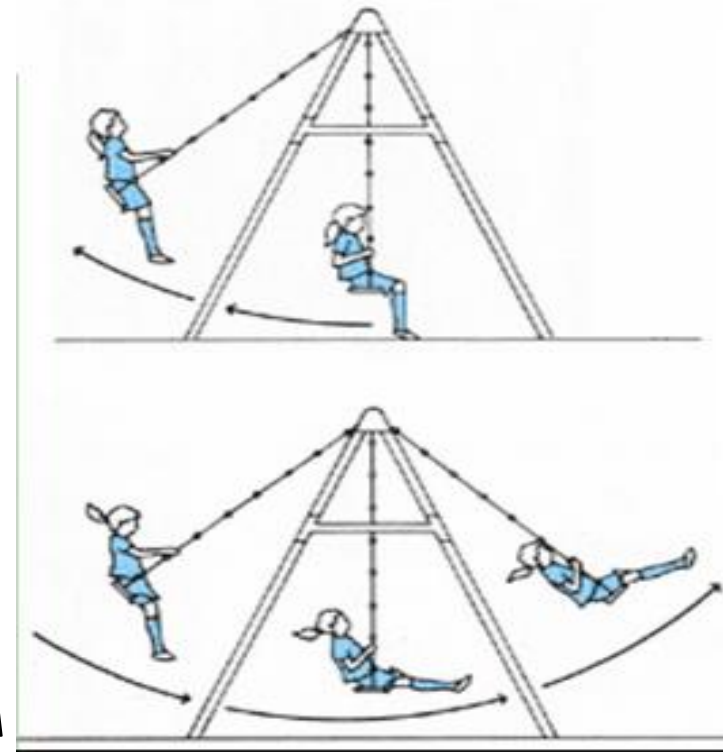
Пример параметрической неустойчивости
Фарадей обнаружил, что если трясти вертикально сосуд
с жидкостью, то в нем возбуждается стоячая волна
($k_1 = -k_2$) с частотой, равной половине частоты тряски
параметр, меняемый периодически, —
это ускорение силы тяжести g .



Пример параметрической неустойчивости.

Фарадей обнаружил, что если трясти вертикально сосуд с жидкостью, то в нем возбуждается стоячая поверхностная волна ($k_1 = -k_2$) с частотой, равной половине частоты тряски — в этом случае параметр, изменяемый периодически, — это ускорение силы тяжести g .

Для простого случая осциллятора (системы с небольшим числом степеней свободы) это явление называется параметрическим резонансом и знакомо всякому ребенку на качелях, который приседает и распрямляется с частотой в два раза большей, чем частота качаний, — в этом случае варьируемым параметром является длина маятника L , т. е. расстояние от точки подвеса до центра тяжести. В обоих случаях варьируется частота $\sqrt{g/L}$, являющаяся параметром гамильтониана.



Нелинейное уравнение Шредингера

В этом параграфе мы рассмотрим эволюцию нелинейного спектрально узкого пакета волн. Описание линейного распространения такого пакета в параграфе 3.1.4 научило нас понятиям фазовой и групповой скорости и каустик. Учет нелинейности потребует освоения столь же фундаментальных понятий боголюбовского спектра возбуждений, модуляционной неустойчивости, солитона, самофокусировки, волнового коллапса и волновой турбулентности.

Рассмотрим квазимонохроматический волновой пакет в изотропной нелинейной среде. Иными словами, предположим, что амплитуды волн в $\mathbf{k}$ -пространстве отличны от нуля в узкой области Δk вокруг некоего $\mathbf{k}_0$. В этом случае процессы, меняющие число волн (типа $1 \rightarrow 2 + 3$ и $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$), нерезонансны, потому что частоты всех волн близки. Стало быть, из гамильтониана взаимодействия можно исключить все члены третьего и четвертого порядков, за исключением $\mathcal{H}_4$, и уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int T_{k123} a_1^* a_2 a_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (3.40)$$

Рассмотрим теперь $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$ с $q \ll k_0$ и разложим, подобно (3.18)

$$\omega(k) = \omega_0 + (\mathbf{q}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}q_i q_j \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right)_0,$$

где $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ при $k = k_0$. В изотропной среде ω зависит только от модуля k , так что

$$\begin{aligned} q_i q_j \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} &= q_i q_j \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{k_j}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} = q_i q_j \left[\frac{k_i k_j \omega''}{k^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{v}{k} \right] = \\ &= q_{\parallel}^2 \omega'' + \frac{q_{\perp}^2 v}{k}. \end{aligned}$$

Колебание с частотой ω_0 является общим для всех волн в пакете и не представляет для нас интереса, поэтому имеет смысл ввести временную огибающую $a_k(t) = \exp(-i\omega_0 t)\psi(\mathbf{q}, t)$ в (3.40):

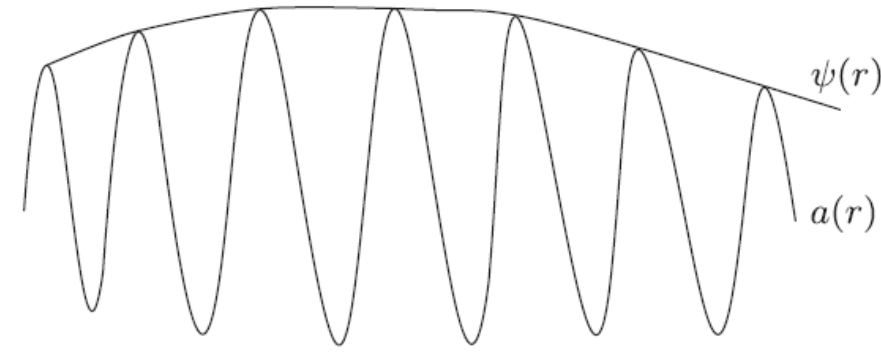
$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{q}\mathbf{v}) - \frac{q_{\parallel}^2 \omega''}{2} - \frac{q_{\perp}^2 v}{2k} \right] \psi_{\mathbf{q}} = T \int \psi_1^* \psi_2 \psi_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3.$$

Мы предположили нелинейный член малым, $T|a_k|^2(\Delta k)^{2d} \ll \omega_k$, и положили в нем $k = k_0$. Если теперь представить результат в r -пространстве для $\psi(\mathbf{r}) = \int \psi_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q}$, то нелинейный член окажется локальным:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \times \\ & \times \exp \left[i(\mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1) - i(\mathbf{q}_2 \mathbf{r}_2) - i(\mathbf{q}_3 \mathbf{r}_3) + i(\mathbf{q} \mathbf{r}) \right] = \\ & = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}) = |\psi|^2 \psi, \end{aligned}$$

и уравнение примет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i\omega''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{iv}{2k} \Delta_{\perp} \psi = -iT|\psi|^2 \psi.$$



$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i\omega''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{iv}{2k} \Delta_{\perp} \psi = -iT|\psi|^2 \psi.$$

Здесь слагаемое $v\partial_z$ описывает распространение с групповой скоростью, $\omega''\partial_{zz}$ дисперсию и $(v/k)\Delta_{\perp}$ дифракцию. Уместно сейчас спросить, почему в разложении $\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ мы удержали члены как линейные, так и квадратичные по малому q . Сделано это потому, что линейный член, давший $\partial\psi/\partial z$ в последнем уравнении, может быть исключен переходом в движущуюся систему $z \rightarrow z - vt$. Вдобавок мы еще растянем поперечную координату в $\sqrt{k_0\omega''/v}$ раз и получим знаменитое нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\omega''}{2} \Delta \psi - T|\psi|^2 \psi = 0. \quad (3.41)$$

Как уже упоминалось, простейший эффект четырехволнового рассеяния — это нелинейная перенормировка частоты. Действительно, наше уравнение имеет стационарное решение в виде плоской волны конечной амплитуды с перенормированной частотой $\psi_0(t) = A_0 \exp(-iT A_0^2 t)$. В квантовой физике это состояние, когерентное на всем пространстве системы, соответствует простейшей (квазиклассической) модели бозе-эйнштейновского конденсата. Опишем поведение малых возмущений на этом фоне. Запишем возмущенное решение как $\psi = (A_0 + \tilde{A})e^{-iT A_0^2 t + i\varphi}$ и предположим возмущение одномерным (вдоль направления, которое обозначим ξ). Тогда вещественная и мнимая части линеаризованного уравнения примут вид

$$\tilde{A}_t + \frac{\omega''}{2} A_0 \varphi_{\xi\xi} = 0, \quad \varphi_t = -2T A_0 \tilde{A} + \frac{\omega''}{2A_0} \tilde{A}_{\xi\xi}.$$

Ищем решение в виде, где промодулированы как амплитуда, так и фаза:

$$\tilde{A} = \alpha \exp(ik\xi - i\Omega t), \quad \varphi = \beta \exp(ik\xi - i\Omega t).$$

Закон дисперсии принимает вид

$$\begin{aligned} -i\Omega A &= A_0 k^2 \omega'' \varphi / 2, \\ -i\Omega \varphi &= 2T A_0 A + A k^2 \omega'' / 2T A_0 \end{aligned}$$

$$\Omega^2 = T \omega'' A_0^2 k^2 + \omega''^2 k^4 / 4. \quad (3.42)$$

$$\Omega^2 = T\omega'' A_0^2 k^2 + \omega'''^2 k^4 / 4. \quad (3.42)$$

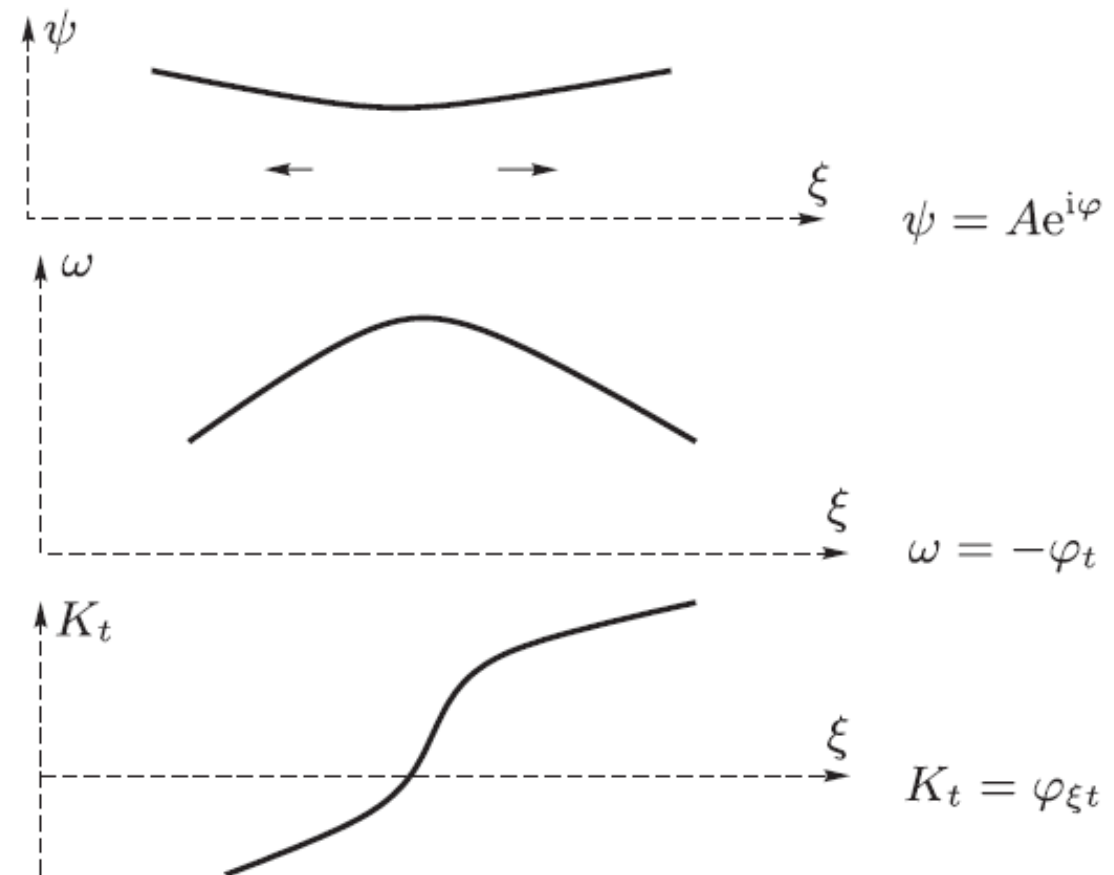
При $T\omega'' > 0$ эта (знаменитая) формула называется спектром Боголюбова флуктуаций конденсата. В случае же обратного неравенства $T\omega'' < 0$ (критерий Лайтхилла) имеем неустойчивость, называемую модуляционной.

Опишем сначала смысл этого критерия неустойчивости на языке классических волн. Классически мы определяем частоту как минус производную по времени от фазы: $\varphi_t = -\omega$. Частота нелинейной волны зависит как от волнового числа, так и от амплитуды. Первые производные частоты по амплитуде и волновому числу равны нулю в нуле $k=0=A$ для систем, симметричных относительно замены $k \rightarrow -k$ и $A \rightarrow -A$. Параметры T и ω''' являются вторыми производными частоты соответственно по амплитуде и волновому числу. Таким образом, неустойчивость имеет место, когда поверхность $\omega(k, A)$ имеет седловую точку в нуле, минимум же и максимум устойчивы. На качественном уровне можно объяснить развитие модуляционной неустойчивости двумя способами, спектральным и пространственно-временным. Со спектральной точки зрения, для неустойчивости необходим четырех-волновой резонанс между основной частотой и частотами модуляций. Для этого дисперсионные поправки к частотам возмущений (имеющих ненулевой k) должны быть скомпенсированы нелинейным сдвигом частоты.

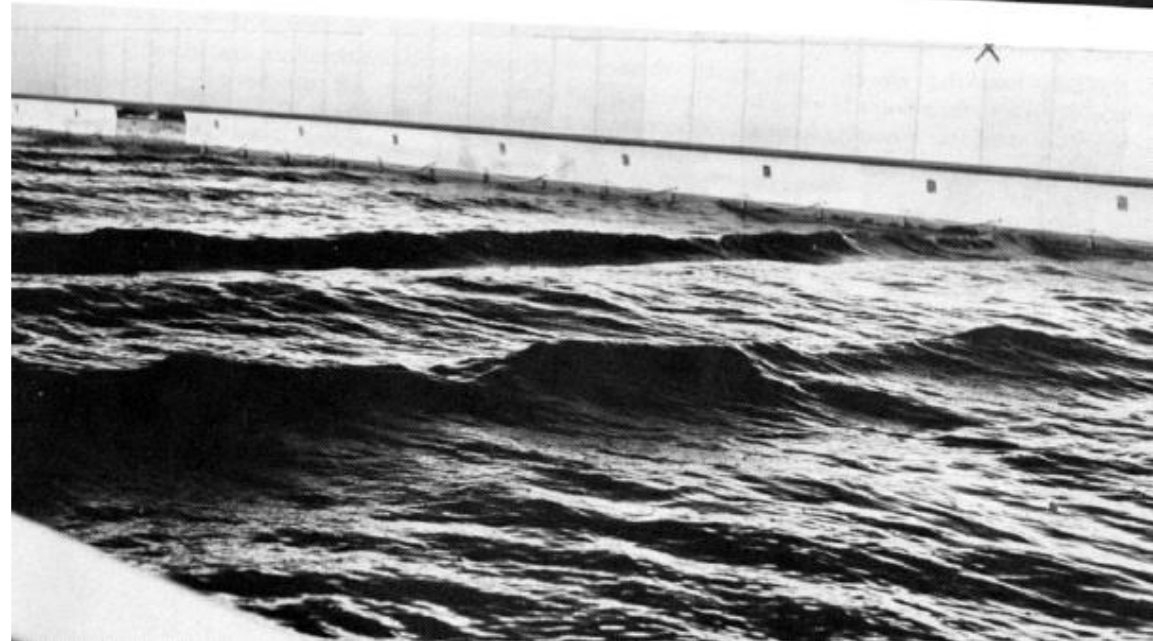
С пространственно-временной точки зрения неустойчивость можно понять, рассмотрев эволюцию локального минимума амплитуды, например, при $\omega'' > 0$ и $T < 0$. Там, где возмущение создает локальный минимум амплитуды, частота максимальна вследствие $T < 0$. Рассмотрим локальное волновое число $K = \varphi_\xi$, чья производная по времени $K_t = \varphi_{\xi t} = -\omega_\xi$ меняет знак, проходя через экстремум частоты. Иными словами, K будет расти справа от максимума ω и убывать слева от него.

Поскольку $\omega'' > 0$, то групповая скорость ω' растет с K , т. е. растет справа и убывает слева, что приводит к разбеганию правой и левой частей (как показано стрелками на рисунке) и дальнейшему углублению минимума.

Одно из проявлений этой неустойчивости нам знакомо: волны, приходящие к берегу, имеют разные амплитуды, иными словами, амплитуда промодулирована.



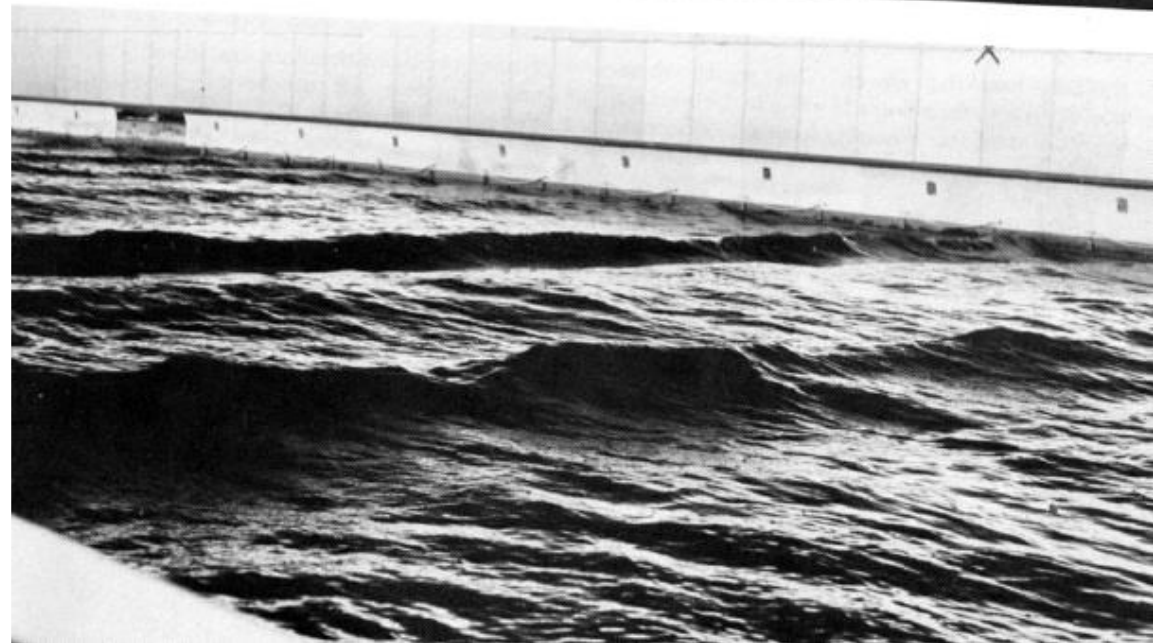
Проверим критерий Лайтхилла для длинных гравитационных волн $\omega_k \propto \sqrt{k}$, так что ω'' ?



Проверим критерий Лайтхилла для длинных гравитационных волн $\omega_k \propto \sqrt{k}$, так что $\omega'' < 0$. В отличие от маятника и вопреки наивной интуиции частота растет с амплитудой и $T > 0$; это связано с тем, что для волн большей амплитуды профиль все более отличается от синусоидального тем, что гребни делаются острее, достигая резкого угла в 120° для достаточно большой (но конечной) амплитуды.

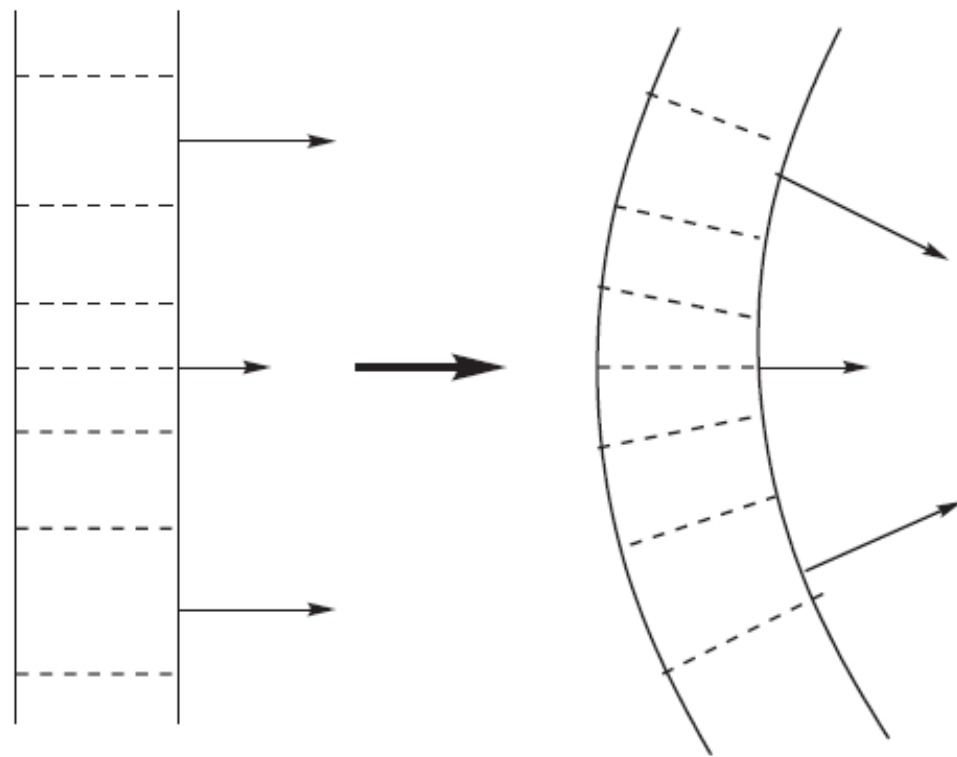
Поскольку $T\omega'' < 0$, длинная гравитационная волна действительно должна быть неустойчива относительно продольных модуляций.

Эта неустойчивость, конечно, наблюдалась многими поколениями мореплавателей, но была впервые воспроизведена в контролируемом эксперименте и описана Бенджамином и Фэйром в 1967 году, поэтому носит их имя. Инкремент неустойчивости максимален для волнового числа $k = A_0 \sqrt{-2T/\omega''}$, что зависит от амплитуды волны. Согласно морскому фольклору, однако, девятый вал самый страшный. Максимальный инкремент неустойчивости квадратичен по амплитуде волны.





Для поперечных возмущений следует заменить ω'' на v/k , величина которого обычно положительна, так что критерий неустойчивости $T < 0$ или $\partial\omega/\partial|a|^2 < 0$. Это, в частности, означает, что для поперечной неустойчивости скорость волны должна убывать с амплитудой. Механизм неустойчивости легко увидеть на рисунке 3.7: для поперечно модулированной волны максимумы амплитуды движатся медленнее, что приводит к искривлению фронта и фокусировке волны, что еще более увеличивает амплитуду.



Сравним модуляционную неустойчивость из-за четырехволнового взаимодействия с распадной неустойчивостью из-за трехволнового взаимодействия. Первая требует выполнения критерия Лайтхилла, тогда как вторая имеет место для любого коэффициента взаимодействия V_{k12} , не обращающегося в ноль на резонансной поверхности $\omega(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(k_1) + \omega(k_2)$. Инкремент распадной неустойчивости $V_{k12}A$ линеен по амплитуде волны, тогда как модуляционная неустойчивость возникает в следующем порядке и ее максимальный инкремент неустойчивости TA^2 квадратичен и обычно меньше. Для волн на глубокой воде, распадная неустойчивость имеет место для коротких (капиллярных) волн; распады становятся нерезонансными начиная с некой длины волны, так что более длинные волны подвержены модуляционной неустойчивости.

Результат модуляционной неустойчивости: СОЛИТОН И КОЛЛАПС.

Поскольку уравнение (3.41) описывает распространение волн и их парное рассеяние друг на друге, то оно сохраняет не только гамильтониан (3.43), но и волновое действие $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$, которое можно также назвать числом волн. Этот закон сохранения следует из уравнения непрерывности

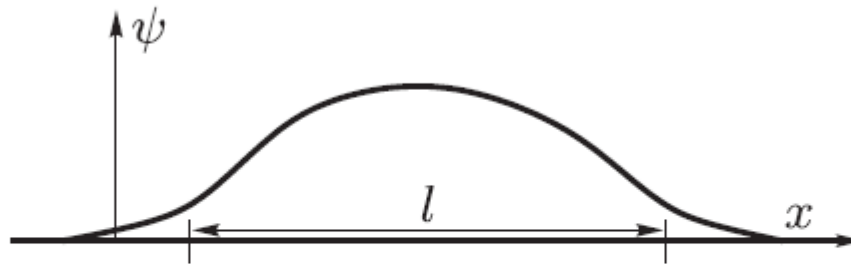
$$2i\partial_t|\psi|^2 = \omega''\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \equiv -2\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (3.44)$$

Результат модуляционной неустойчивости: СОЛИТОН И КОЛЛАПС.

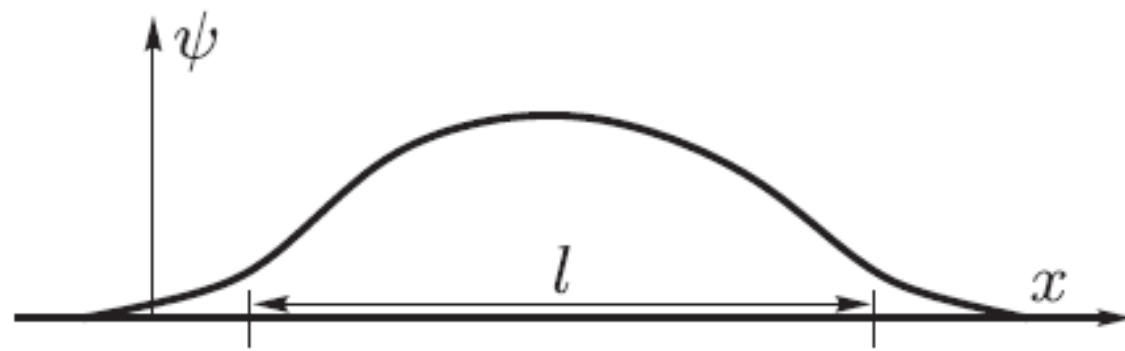
Поскольку уравнение (3.41) описывает распространение волн и их парное рассеяние друг на друге, то оно сохраняет не только гамильтониан (3.43), но и волновое действие $N = \int |\psi|^2 dr$, которое можно также назвать числом волн. Этот закон сохранения следует из уравнения непрерывности

$$2i\partial_t |\psi|^2 = \omega'' \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \equiv -2 \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (3.44)$$

Рассмотрим волновой пакет, имеющий размер l , вообще говоря зависящий от времени, и постоянное значение N .



Амплитуда волнового поля в пакете оценивается как $|\psi|^2 \simeq N/l^d$, что позволяет оценить гамильтониан как $\mathcal{H} \simeq \omega'' N l^{-2} + T N^2 l^{-d}$ — напомним, что второе слагаемое здесь отрицательно. Полная энергия системы, разумеется, сохраняется, однако энергия пакета должна стремиться к минимуму вслед-



Амплитуда волнового поля в пакете оценивается как $|\psi|^2 \simeq N/l^d$, что позволяет оценить гамильтониан как $\mathcal{H} \simeq \omega'' N l^{-2} + T N^2 l^{-d}$ — напомним, что второе слагаемое здесь отрицательно. Полная энергия системы, разумеется, сохраняется, однако энергия пакета должна стремиться к минимуму вследствие излучения и ухода энергии на бесконечность. Мы хотим понять направление эволюции, рассматривая ее адиабатически медленной. При этом волновое действие сохраняется, поскольку оно является адиабатическим инвариантом. Это особенно ясно для квантовой системы типа облака холодных атомов, где N есть их число. Соответствует ли минимум энергии $l \rightarrow 0$ (что называется самофокусировкой или волновым коллапсом), определяется балансом между $|\nabla\psi|^2$ и $|\psi|^4$. Гамильтониан $\mathcal{H}$ как функция l

$$\mathcal{H} \simeq \omega'' N l^{-2} + T N^2 l^{-d}$$

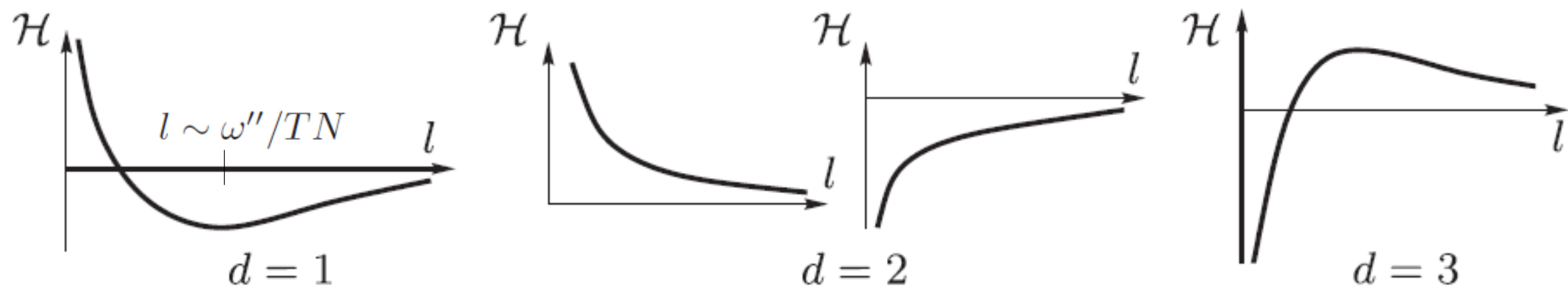
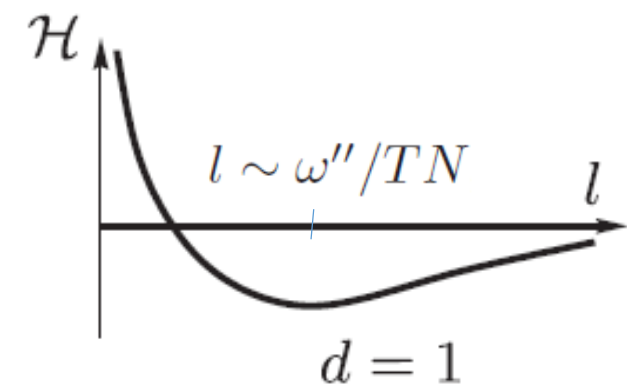


Рис. 3.8. Гамильтониан $\mathcal{H}$ как функция размера пакета l при фиксированном N .

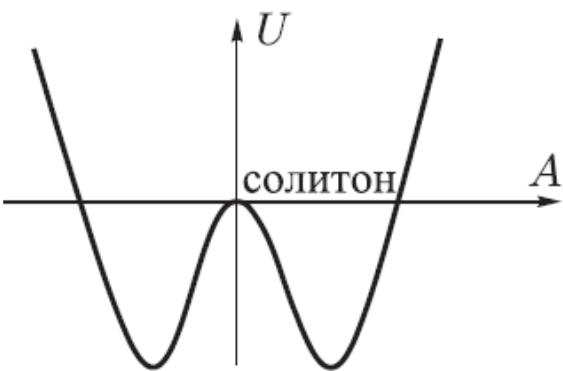
Одномерные солитоны и фронты



$$\psi(x, t) = A(x - ut)e^{i\varphi}$$

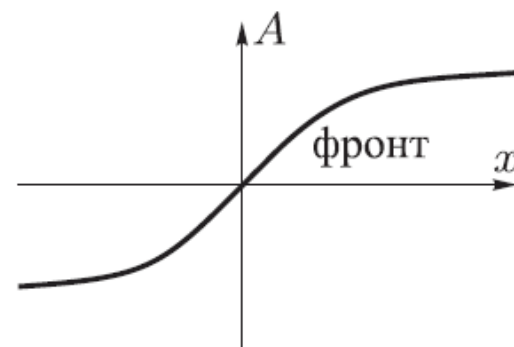
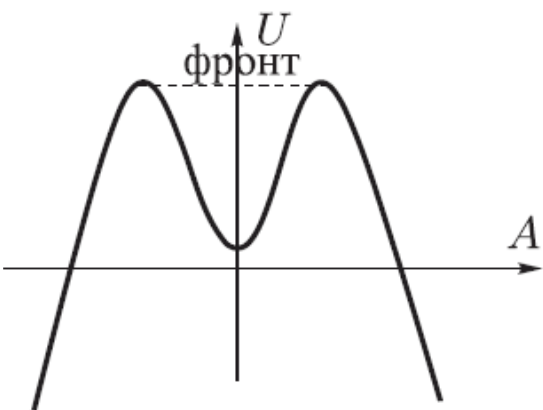
$$\varphi(x, t) = f(x - ut) - TA_0^2 t$$

$$A'' = \frac{2T}{\omega''} (A^3 - A_0^2 A) + Af' \left(f' - \frac{2u}{\omega''} \right), \quad \omega'' \left(A' f' + \frac{A f''}{2} \right) = u A'$$



$$T\omega'' < 0$$

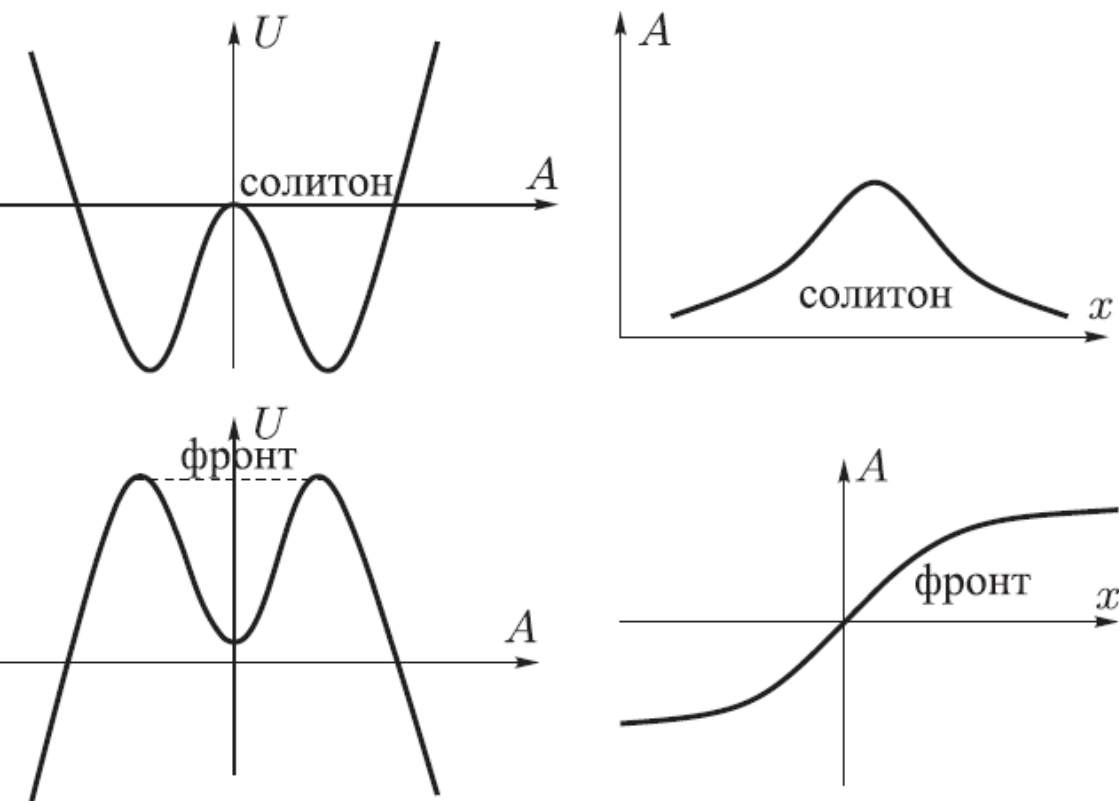
$$A'' = -dU/dA$$



$$T\omega'' > 0$$

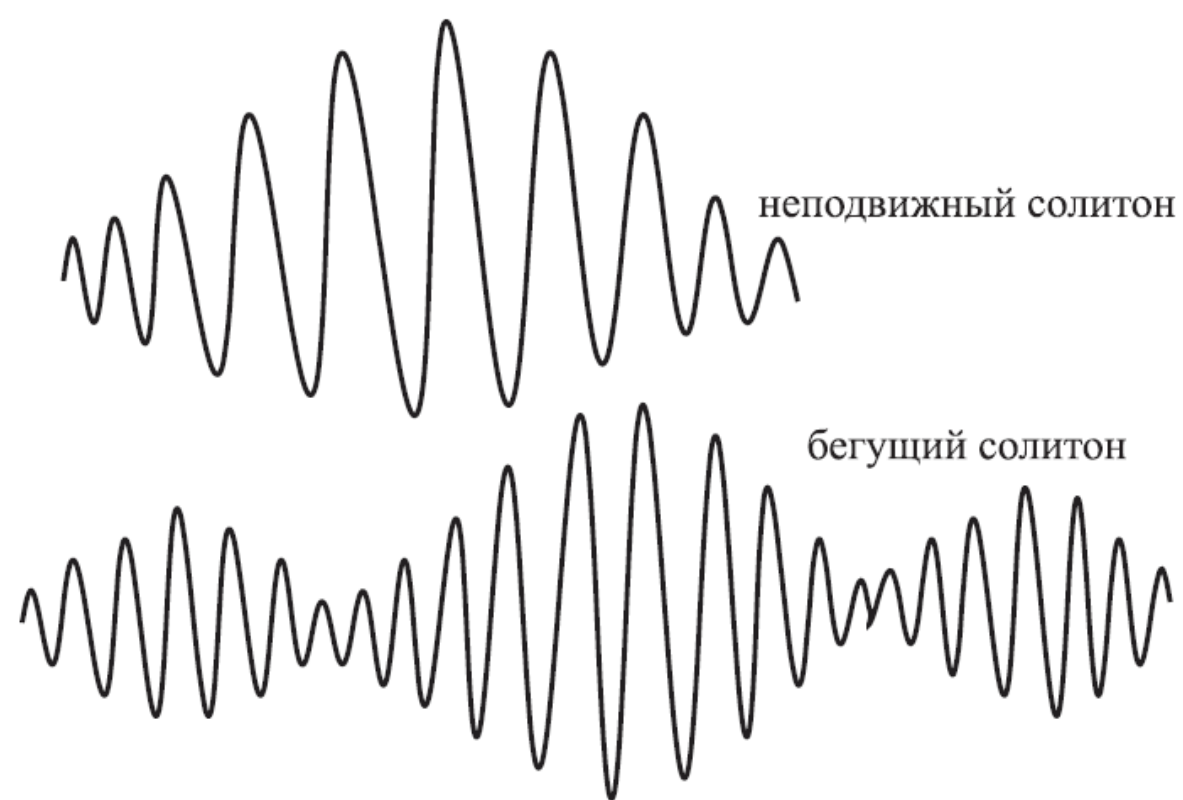
$$U(A) = -(T/2\omega'')(A^4 - 2A^2 A_0^2)$$

Одномерные солитоны



$$T\omega'' < 0$$

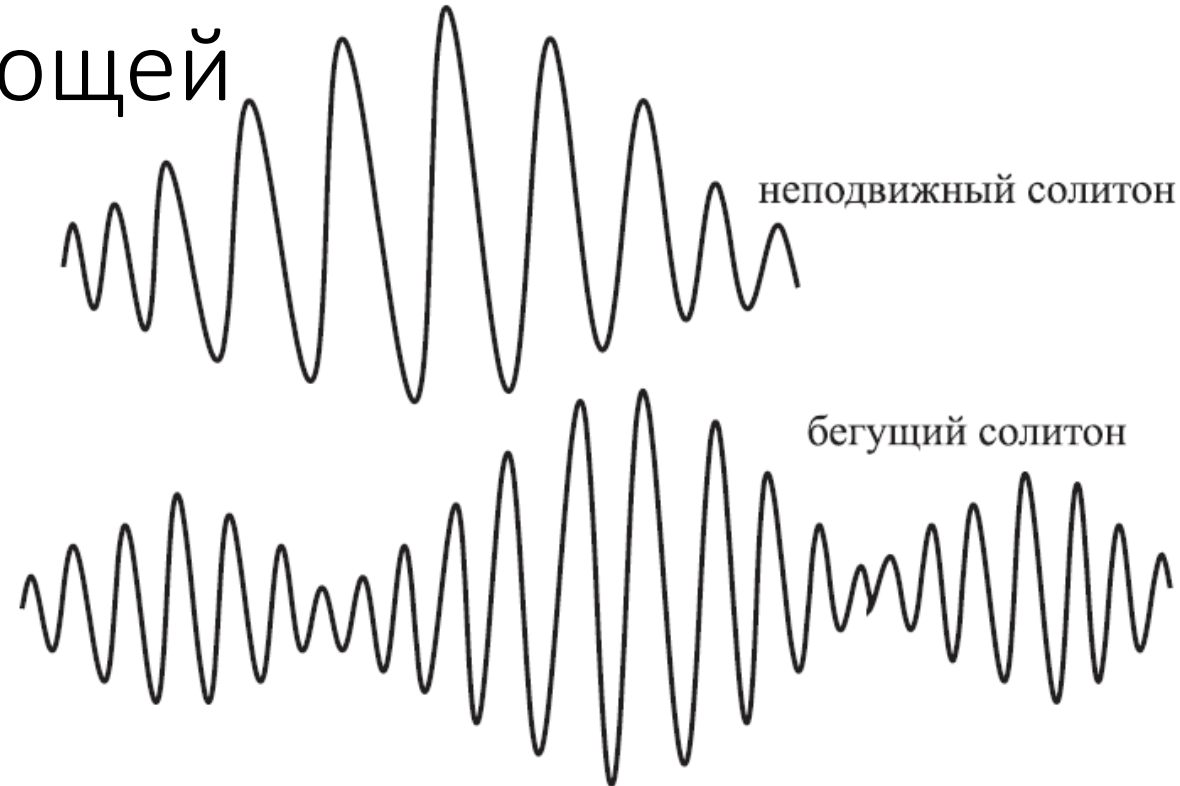
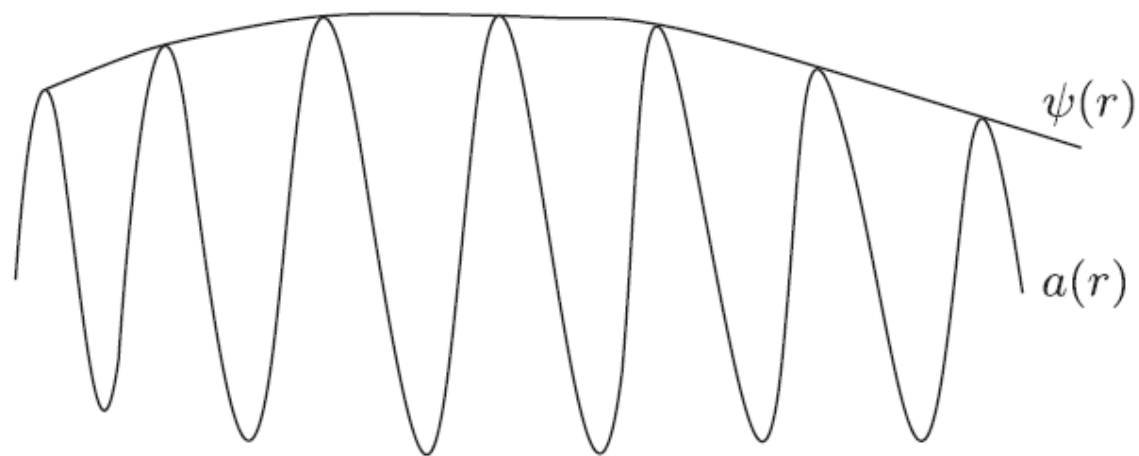
$$T\omega'' > 0$$



Слева: Энергия как функция амплитуды бегущей волны и профиль волны. Верхняя часть соответствует неустойчивости монохроматической волны (конденсата), результат которой - стационарная волна, солитон. Нижняя часть соответствует устойчивому конденсату, где стационарная волна — это фронт. Справа – солитон огибающей.

$$\psi(x, t) = \sqrt{2}A_0 \cosh^{-1} \left[\left(\frac{-2T}{\omega''} \right)^{1/2} (x - ut)A_0 \right] e^{i(2x - ut)u/2\omega'' - iTA_0^2 t}.$$

Одномерный солитон огибающей

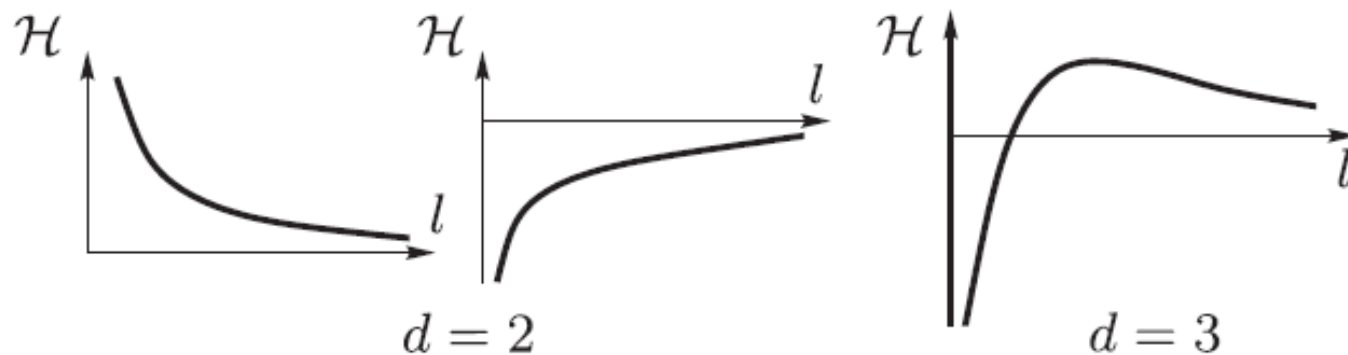


В квадратной скобке - групповая скорость u , что в два раза больше фазовой скорости, задаваемая экспонентой, как и должно быть для волн с квадратичной зависимостью частоты от волнового вектора.

$$\psi(x, t) = \sqrt{2}A_0 \cosh^{-1} \left[\left(\frac{-2T}{\omega''} \right)^{1/2} (x - ut)A_0 \right] e^{i(2x - ut)u/2\omega'' - iT A_0^2 t}.$$

Самофокусировка и волновой коллапс

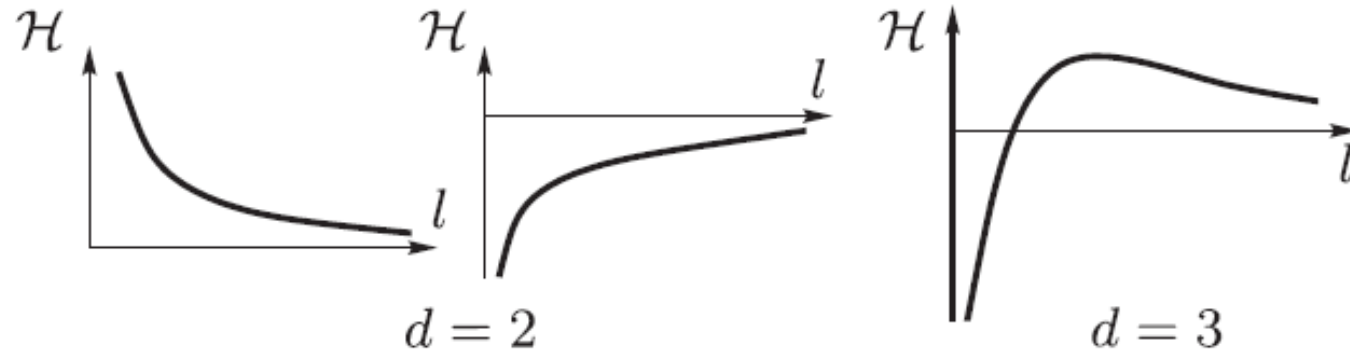
$$l^2(t) = \int |\psi|^2 r^2 d\mathbf{r}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l^2}{\omega'' \partial t^2} &= \frac{i \partial_t}{2} \int r^2 \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \partial \mathbf{r} = i \partial_t \int r_\alpha (\psi \nabla_\alpha \psi^* - \psi^* \nabla_\alpha \psi) \partial \mathbf{r} = \\ &= - \int \left[\frac{\omega''}{2} \left(\psi \nabla_\alpha \Delta \psi^* + \psi^* \nabla_\alpha \Delta \psi - \nabla_\beta (\nabla_\beta \psi \nabla_\alpha \psi^* + \nabla_\beta \psi^* \nabla_\alpha \psi) \right) - \right. \\ &\quad \left. - T \nabla_\alpha |\psi|^4 \right] r_\alpha \partial \mathbf{r} = \partial T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r} + 2\omega'' \int |\nabla \psi|^2 \partial \mathbf{r} = \\ &= 4\mathcal{H} + 2(d-2)T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Самофокусировка и волновой коллапс

$$l^2(t) = \int |\psi|^2 r^2 d\mathbf{r}$$



$$\frac{\partial^2 l^2}{\omega'' \partial t^2} = \frac{i \partial_t}{2} \int r^2 \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \partial \mathbf{r} = i \partial_t \int r_\alpha (\psi \nabla_\alpha \psi^* - \psi^* \nabla_\alpha \psi) \partial \mathbf{r} =$$

$$= - \int \left[\frac{\omega''}{2} \left(\psi \nabla_\alpha \Delta \psi^* + \psi^* \nabla_\alpha \Delta \psi - \nabla_\beta (\nabla_\beta \psi \nabla_\alpha \psi^* + \nabla_\beta \psi^* \nabla_\alpha \psi) \right) - \right.$$

$$\left. - T \nabla_\alpha |\psi|^4 \right] r_\alpha \partial \mathbf{r} = \partial T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r} + 2\omega'' \int |\nabla \psi|^2 \partial \mathbf{r} =$$

$$d \geq 2$$

$$= 4\mathcal{H} + 2(d-2)T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r}.$$

$$l^2(t) \leq 2\omega'' \mathcal{H} t^2 + C_1 t + C_2$$

для $\omega'' \mathcal{H} < 0$ пакет сжимается в сингулярность за конечное время

Экзамен -экспериментальная работа на выбор.

Описание может включать видео, фотографии, скетчи, формулы – на ваше усмотрение. Опишите наблюдаемые явления и попробуйте объяснить их.

1. Найдите водоем не меньше 4-5 метров в диаметре. Дождитесь безветренной погоды, чтобы поверхность воды была спокойной. Бросьте в воду небольшой камешек (меньше 3 см). Опишите и объясните, что происходит с поверхностью воды со временем.
2. Найдите раковину с краном и плоским дном. Откройте кран сначала со слабой струей, потом все сильнее и сильнее. Опишите, что происходит со струей и что происходит с водой, растекающейся по дну раковины.

Удачи!