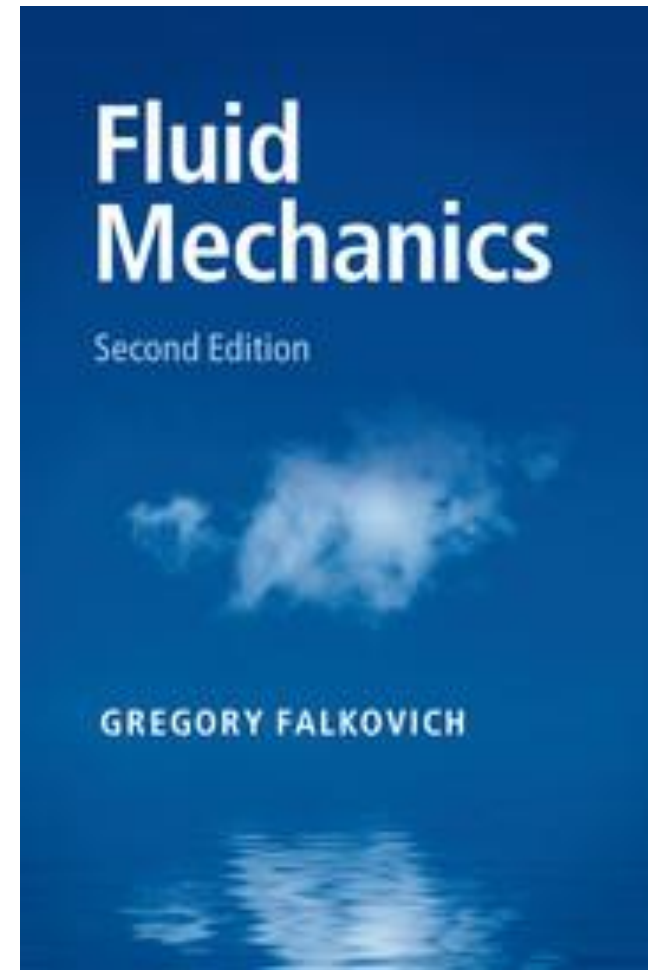


Waves

G Falkovich 2021

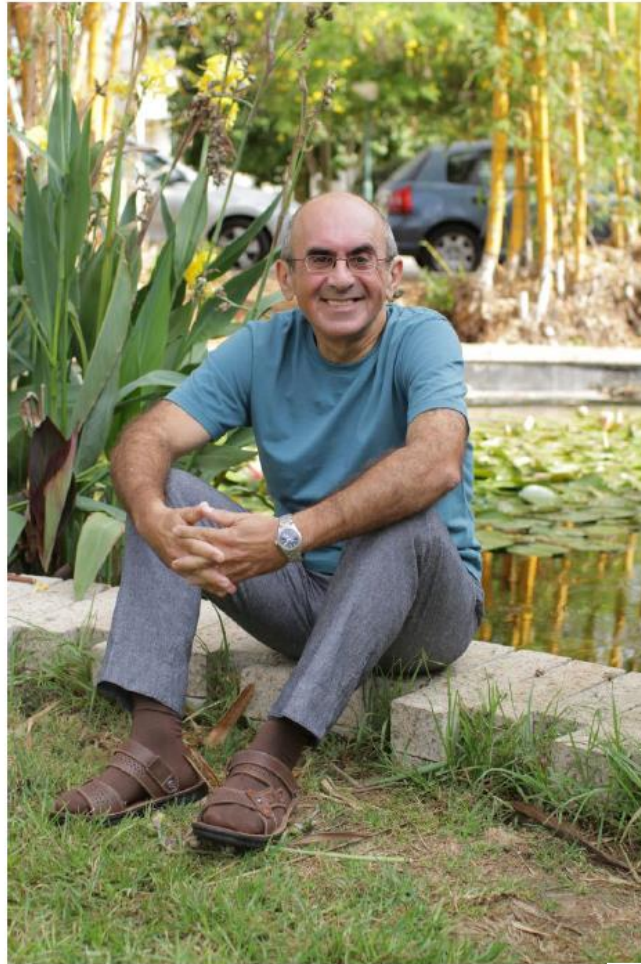
<https://shop.rcd.ru/catalog/matematika-i-mehanika1/19024/>

<https://www.cambridge.org/core/books/fluid-mechanics/ADCDB15D96517FF93F8D894997174B3E>



Gregory Falkovich

- **Home**
- Research highlights
- Books and reviews
- Research papers
- Talks/Interviews
- Courses
- Conferences/Programs
- Group/Collaborators
- Photo Gallery
- Fluid mechanics
- Contact Us



gregory.falkovich@weizmann.ac.il

[CV \(PDF\)](#)

[YouTube Channel](#)

Prof. Gregory Falkovich

Pollak Professorial Chair
in Physics

Weizmann Institute of
Science
Rehovot 76100, ISRAEL
Weissman Building,
Room 262

Tel: +972-8-934-2830

Fax: +972-8-934-4109

[Lecture Notes on Information](#), [Video](#)

[Видео "Жили-были ученые..."](#)

[Archive author identifier](#)

Почему мы часто видим периодические волны на воде и так редко слышим чистую ноту?



Почему они набегают на берег параллельно ему, даже если ветер дует наискосок?



Почему волны на воде часто неодинаковые и не прямые?



**Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые;
иначе такое бросание будет пустой забавою.**



Почему короткие и длинные волны
бегут вместе?



Как устроен след от корабля?



Почему одни волны большие,
а другие очень большие?



Почему одни волны большие,
а другие очень большие?



Страничка для филологов.

Поэты о волнах и волнении

Дума за думой, волна за волной –
Два проявленья стихии одной:
В сердце ли тесном, в безбрежном ли море,
Здесь – в заключении, там – на просторе –
Тот же всё вечный прибой и отбой,
Тот же всё призрак тревожно-пустой.

Федор Тютчев

[Бежит волна-волной, волне хребет ломая,](#)
Кидаясь на луну в невольничьей тоске,
И янычарская пучина молодая,
Неусыпленная столица волновая,
Кривеет, мечется и роет ров в песке...

Осип Мандельштам

... Там, в стороне от нас, от мира в стороне
Волна идет вослед волне о берег биться,
А на волне звезда, и человек, и птица,
И явь, и сны, и смерть - волна вослед волне.

Арсений Тарковский

Волнение чернеющей листвы,
Волненье душ и невское волненье,
И запах загнивающей травы
И облаков белесое гоненье,
И странная вечерняя тоска,
Живущая и замкнуто и немо,
И ровное дыхание стиха,
Нежданно посетившее поэму...

И Бродский

Английский

Wave – волна, махать.

Французский

Vague – волна, неясность.

Иврит

לָג – волна, куча.

Украинский

Хвиля – волна, хвилина – минута.

...That wave's been standing off this jut of shore --'
The black stream, catching a sunken rock,
Flung backward on itself in one white wave,
And the white water rode the black forever...

Speaking of contraries, see how the brook
In that white wave runs counter to itself.

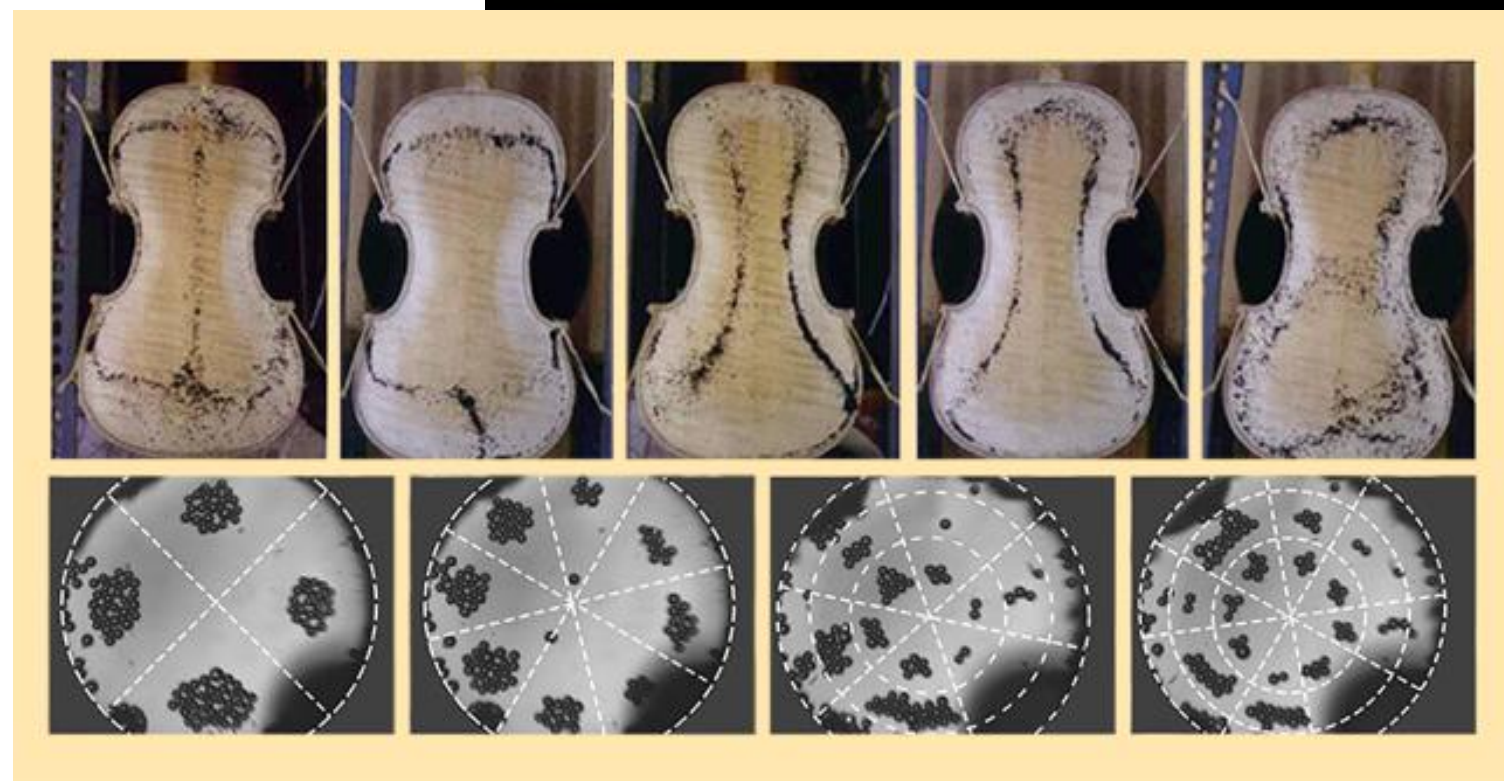
It is from that in water we were from
Long, long before we were from any creature...
It is this backward motion toward the source,
Against the stream,
that most we see ourselves in,
The tribute of the current to the source.

Robert Frost





Кстати, зачем нам два уха?
А два глаза?



Звук

Как угадать закон распространения?

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr - i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять

природу возмущения и возвращающей силы.

Звук – это возмущение плотности.

А сила – это давление.

$$\omega = k^a P^b \rho^c$$

$$\text{сек}^{-1} = \text{см}^a (\text{г/см сек}^{-1})^b (\text{г/см}^{-3})^c$$

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук — это возмущение плотности.

А сила — это давление.

$$\omega = k \sqrt{P/\rho}$$

Звук

Как угадать закон распространения?

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $e^{ikr-i\omega t}$. Для каждого типа волн надо найти связь ω и k .

Для этого надо понять природу возмущения и возвращающей силы.

Звук — это возмущение плотности.

А сила — это давление.

$$\omega = k \sqrt{\partial P / \partial \rho} = ck.$$

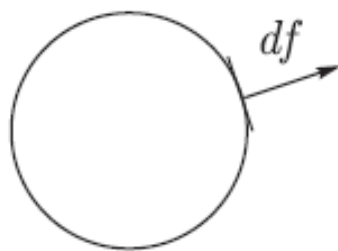
Как видно, c действительно является скоростью звука. Осталось установить, какую производную $\partial p / \partial \rho$ использовать, изотермическую или адиабатическую. Эти производные различаются весьма значительно, например, для газа изотермическая производная дает $c^2 = P / \rho$, тогда как закон адиабаты $P \propto \rho^\gamma$ дает:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (2.24)$$

Адиабатическое уравнение состояния следует использовать, когда можно пренебречь теплообменом между теплыми областями сжатия и холодными областями расширения. Для этого необходимо, чтобы теплопроводность (которую можно оценить как произведение тепловой скорости на длину свободного пробега) была меньше, чем произведение скорости звука на длину волны. Поскольку скорость звука порядка тепловой скорости, получается требование, чтобы длина волны была много больше длины свободного пробега, что всегда выполняется. Таким образом, звук всегда следует рассматривать адиабатически. Ньютон уже знал, что $c^2 = \partial p / \partial \rho$. Экспериментальные данные Бойля показывали $p \propto \rho$ (т. е. были изотермическими), что давало для воздуха значение $c^2 = p / \rho \simeq 290$ м/с, заметно отличающееся от измеренного 340 м/с при 20 °С. Только через сто лет Лаплас получил правильное (адиабатическое) значение, используя $\gamma = 7/5$.

Динамика сплошной среды: уравнения Эйлера и непрерывности

Уравнение Эйлера. В отсутствие трения сила, действующая на любой объем, равна интегралу от давления по поверхности: $-\oint p d\mathbf{f}$. Элемент поверхности $d\mathbf{f}$ — это вектор, направленный по нормали наружу.



Используя формулу Стокса, преобразуем поверхностный интеграл в объемный: $-\oint p d\mathbf{f} = -\int \nabla p dV$. Таким образом, сила, действующая на единицу объема, равна $-\nabla p$. Было бы ошибкой, однако, приравнять эту силу к производной по времени от импульса жидкости в этом объеме. Чтобы написать второй закон Ньютона, мы должны выделить жидкую частицу, т. е. малую часть жидкости с фиксированной массой (которую будем полагать равной единице). Тогда сила, действующая на единичную массу, $\nabla p / \rho$, должна быть равна ускорению частицы $d\mathbf{v} / dt$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Как вычислить ускорение частицы жидкости, если известно поле скорости как функция координат и времени $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$?

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \stackrel{?}{=} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

За время dt скорость частицы изменится на $d\mathbf{v}$, которая состоит из двух частей, временной и пространственной:

$$d\mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Это изменение в данной точке плюс разница между двумя точками, раздвинутыми на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, на которое сдвинулась частица за время dt . Разделив (1.1) на dt , получим так называемую материальную производную как локальную производную плюс перенос:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

1.1.4. Изэнтропическое течение

Простейшие течения соответствуют постоянной s и описываются существенно упрощенным уравнением Эйлера вследствие возможности представить $\nabla p/\rho$ как градиент. Для такого представления нам нужен термодинамический потенциал, который зависит от p, s , так что при постоянном s его дифференциал выражается только через dp . Такой потенциал называется *энтальпией* и выражается через внутреннюю энергию единичной массы жидкости E по формуле $W = E + pV$. Из всей термодинамики для нас достаточно одного соотношения $dE = Tds - pdV$, так что $dW = Tds + Vdp$ и $W = \partial(E\rho)/\partial\rho$. Поскольку энтропия не меняется ни в пространстве, ни во времени для изэнтропического течения и $V = \rho^{-1}$ для единичной массы, то $dW = dp/\rho$ и мы получаем в отсутствие внешних сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla W. \quad (1.10)$$

Малые возмущения плотности распространяются как звуковые волны, которые в идеальной жидкости описываются уравнениями непрерывности и Эйлера, линеаризованными относительно возмущений $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.22)$$

Как связать вариации давления и плотности?

$$p' = c^2 \rho'.$$

Если амплитуда колебаний a мала по сравнению с масштабом изменения скорости l , то $\partial v / \partial t \sim v^2 / a$, в то время как $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \sim v^2 / l$, так что можно пренебречь нелинейным членом и $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla W$. Взяв ротор от этого соотношения, получим сохранение $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, среднее от которого должно отсутствовать для осцилляторного движения, так что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ и

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

только $v_x = \partial \phi / \partial x$ отлична от нуля

звуковые волны в жидкостях и газах являются продольными. Любое локализованное одномерное возмущение (плотности, давления или скорости вдоль x) распадается на два одномерных волновых пакета, движущихся в противоположных направлениях без изменения формы. В каждом из волновых пакетов $\partial / \partial t = \pm c \partial / \partial x$, так что второе уравнение (2.22) дает $v = p' / \rho c = c \rho' / \rho$. Амплитуда волны мала, когда $\rho' \ll \rho$, что требует $v \ll c$.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.22)$$

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0$$

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

только $v_x = \partial \phi / \partial x$ отлична от нуля

Для сферически симметричного случая в d измерениях уравнение

$$\phi_{tt} = \frac{c^2}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.26)$$

принимает вид $h_{tt} = c^2 \partial^2 h / \partial r^2$ после подстановки $\phi = h/r^a$ только для $d = 1, a = 0$ и $d = 3, a = 1$. Вследствие этого удастся сразу же написать общее решение уравнения (2.26) также и в трехмерном случае:

$$\phi(r, t) = r^{-1} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]. \quad (2.27)$$

Чтобы получить пространственную плотность энергии звука E_w , разложим $\rho E + \rho v^2/2$ до членов второго порядка по возмущениям. Постоянный член $\rho_0 E_0$ не имеет отношения к волне. Также следует опустить член первого порядка $\rho' \partial(\rho E)/\partial \rho = w_0 \rho'$, который просто связан с перераспределением массы и исчезает после интегрирования по объему. Остаются квадратичные члены

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}.$$

Плотность потока энергии с той же точностью есть

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (w + v^2/2) \approx \rho \mathbf{v} w = w' \rho_0 \mathbf{v} + w_0 \rho' \mathbf{v}.$$

Опять мы опустим $w_0 \rho' \mathbf{v}$, соответствующий $w_0 \rho'$ в энергии и исчезающий после интегрирования по объему. Изменение энтальпии есть $w' = p'(\partial w/\partial p)_s = p'/\rho \approx p'/\rho_0$, и мы получаем

$$\mathbf{q} = p' \mathbf{v}.$$

Плотность потока энергии – это мощность, падающая на единицу площади.

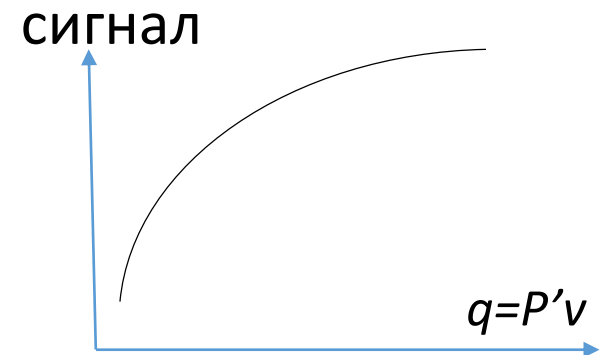
Откуда децибелы?

$$q(\text{dB}) = 120 + 10 \log_{10} q \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Чтобы меньше пугаться рева близкого медведя и лучше слышать журчание далекого ручья, наше ухо усиливает тихие и подавляет громкие звуки.

В результате, в мозг посылается сигнал, пропорциональный логарифму интенсивности.

Нормальный разговор 50-60 децибел, рок-концерт 100.



Плотность импульса есть

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2.$$

Акустическое возмущение в конечном объеме, не ограниченном стенками, имеет ненулевой импульс

$$\int \mathbf{j} dV = \rho_0 \int \nabla \phi dV + \int \mathbf{q} dV / c^2 = \int \mathbf{q} dV / c^2$$

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение – как его решить?

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение, которое можно решить итерациями $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t) + \dots$,

$$X_1(t) = \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t),$$

$$X_2(t) = \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t).$$

Что мы видим?

Стоксов дрейф

Рассмотрим поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t)$$

Это нелинейное уравнение, которое можно решить итерациями $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t) + \dots$,

$$X_1(t) = \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t),$$

$$X_2(t) = \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t).$$

Видим, что в первом порядке по амплитуде волны возмущение распространяется, а во втором сама жидкость течет со скоростью $ku^2/2\omega = u^2/2c$ в направлении распространения волны. Причина в том, что частицы жидкости движутся вместе с волной чуть дальше, чем против нее.

Заметим, что в одномерном случае ненулевой импульс вовсе не означает среднего переноса жидкости. Частицы жидкости обмениваются импульсом, который поэтому может передаваться без переноса массы. Например, можно сгенерировать волновой пакет, подвигав туда-сюда поршень в трубе, что не произведет никакого среднего течения. В этом случае каждая частица жидкости осциллирует в волне, а затем возвращается в исходное положение после прохождения пакета. Следовательно, среднее по времени от потока массы равно нулю в каждой точке: $\overline{\rho v} = \rho_0 \bar{v} + \overline{\rho' v} = 0$. Это требует среднего противотока $\bar{v} = -\overline{\rho' v} / \rho_0 = -\overline{v^2} / c = -u^2 / 2c$, в точности компенсирующего лагранжев дрейф (2.30), полученный в отсутствие средней эйлеровой скорости.