

Краткая неофициальная версия программы учебной дисциплины

Название дисциплины	<i>Стохастические процессы и моделирование в физике</i>
Автор(ы) программы	<i>Парфеньев Владимир Михайлович, Белан Сергей Александрович</i>
Курс	<i>3 курс</i>
Модули	<i>1-2 модуль</i>
Объём курса	<i>1 лекция + 1 семинар</i>
Элементы контроля	<i>Два домашних задания + проект + письменный экзамен</i>

1. Аннотация курса

Курс представляет собой краткое введение в прикладную теорию вероятностей и нацелен на освоение навыков применения стохастических моделей. Акцент делается на интуитивное объяснение теоретических концепций, таких как случайные блуждания, закон больших чисел, марковские процессы, взаимная информация, энтропия Шеннона и др., дополненных практическими реализациями основных алгоритмов. Большинство рассматриваемых концепций иллюстрируются примерами из области естественных наук. Курс будет полезен студентам, которые в дальнейшем собираются работать в областях, требующих знания основ теории стохастических процессов.

Для успешного освоения дисциплины студенты должны владеть базовыми навыками создания программ на каком-либо языке программирования (Python, Julia, etc.).

2. Программа курса

1. Случайная величина. Статистические моменты. Вероятностные неравенства. Характеристическая функция. Производящая функция моментов.
2. Распределение Гаусса. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
3. Процессы Бернулли и Пуассона. Закон редких событий.
4. Марковские цепи. Эргодичность. Детальный и глобальный баланс. Скорость сходимости к стационарному распределению.
5. Методы генерации случайных величин с заданной функцией распределения. Алгоритмы Markov Chain Monte Carlo. Пример: модель Изинга и алгоритм Metropolis-Hastings.
6. Основы теории очередей: аналитический анализ и численное моделирование.
7. Элементы теории информации. Энтропия Шеннона. Взаимная информация. Мера Кульбака-Лейблера. Связь по каналу с шумом.
8. Броуновское движение. Уравнение Ланжевена. Телеграфный процесс. Уравнение Фоккера-Планка. Диффузия во внешнем потенциале.
9. Задача первого прохождения. Диффузия с поглощающими стенками. Скорость вылета броуновской частицы из потенциальной ямы (задача Крамерса).
10. Модель Курамото. Синхронизация взаимодействующих осцилляторов. Фазовый переход.
11. Динамическое программирование. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Элементы теории оптимального контроля.
12. Стохастические поля.

3. Элементы контроля и правила оценивания

Оценка за курс складывается из накопленной части (Н) и оценки за письменный экзамен (Э). Итоговая оценка (ИО) вычисляется по формуле: $ИО=0.7*Н+0.3*Э$.

Накопленная оценка (Н) выставляется по результатам проверки двух домашних заданий (З1 и З2) и по результатам сдачи итоговых проектов (П): $Н=0.35*(З1+З2)+0.3*П$.

Каждое домашнее задание предполагает решение 6-8 задач. Многие задачи для своего решения требуют написания программы на каком-либо языке программирования.

Итоговый проект предполагает самостоятельное изучение литературы и проведение небольшого исследования на заранее согласованную тему. Тему можно будет выбрать самостоятельно (и согласовать с преподавателем), либо взять ее из списка предлагаемых тем. Результаты необходимо представить в виде устного доклада на 20 минут.

4. Примеры заданий элементов контроля

Примеры задач из задания:

Задача 1. Случайным образом выберем 3 точки на окружности $x^2+y^2=1$. Эти точки делят окружность на 3 дуги. Вычислите аналитически математическое ожидание длины дуги, содержащей точку $(1, 0)$. Подтвердите аналитический результат численным моделированием.

Задача 2. Нестабильная броуновская частица движется в интервале $0 < x < L$, ограниченном двумя поглощающими стенками. В начальный момент времени частица находилась в точке с координатой $x=x_0$. Распад частицы описывается пуассоновским процессом со скоростью r , коэффициент диффузии равен D .

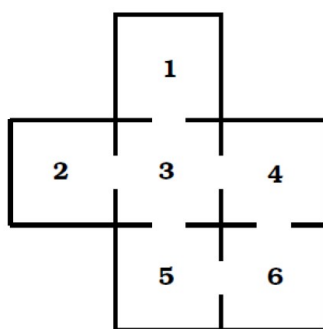
- 1) Вычислите вероятность выживания частицы $P(t)$ к моменту времени t аналитически.
- 2) Определите среднее время жизни частицы аналитически и путем численного моделирования для $L=1$, $D=1$, $r=1$ и $x_0=0.2$.
- 3) Пусть $x_0=L/5$. Какова вероятность, что частица будет поглощена стенкой до того, как она распадется? Ответьте на этот вопрос аналитически или численно.

Пример темы для проекта:

Стохастический резонанс – физическое явление, которое важно в оптике и передаче информации; описывает как шум или случайность могут играть конструктивную роль -- усиливают сигнал и позволяют детектировать то, что иначе было бы трудно зарегистрировать (Benzi, R.; Sutera, A.; and Vulpiani, A. "The Mechanism of Stochastic Resonance." J. Phys. A 14, L453-L457, 1981).

Пример задачи из экзамена:

Задача 1. Мышь живет в лабиринте, изображенном на рисунке. На каждом временном шаге мышь случайным образом выбирает одну из дверей и переходит через нее в соседнюю комнату. Процесс повторяется. Формально, перемещение мыши можно полностью описать марковской цепью с переходами между шестью состояниями.



- 1) Запишите матрицу переходов P для этой марковской цепи. Является ли она неприводимой, апериодичной, эргодичной?

Согласно определению, стационарное распределение q^* является собственным вектором матрицы P , соответствующим собственному значению $\lambda=1$, т.е. $Pq^*=q^*$.

- 2) Найдите стационарное распределение q^* . Выполняется ли условие детального баланса?

Теперь предположим, что изначально мышь была в комнате с номером 1.

- 3) Чему равна вероятность обнаружить мышь в комнате с номером 5 через 4 шага? Через 5 шагов?
- 4) Стремятся ли вероятности найти мышь в разных комнатах к стационарному распределению q^* ? Почему?

Предположим, что кто-то положил мышеловку в комнату с номером 5, когда мышь была в комнате с номером 1.

- 5) Определите среднее число шагов, которое приведет мышь в ловушку, т.е. среднее число шагов до того момента, когда мышь попадет в комнату с номером 5 в первый раз.

5. Рекомендованная литература и ссылки по теме

5.1. Основной список

Студентам будет предоставлен конспект лекционного материала.

1. N.G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, Third Edition (North-Holland Personal Library).
2. Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, David Mac Kay
<http://www.inference.phy.cam.ac.uk/itprnn/book.html>
3. Nature of Computations, Christopher Moore and Stephan Mertens, <http://www.nature-of-computation.org/>

5.2. Дополнительный список

1. Barry L. Nelson, Stochastic Modeling: Analysis and Simulation (Dover Books on

Mathematics).

2. Erhan Cinlar, Introduction to Stochastic Processes (Dover Books on Mathematics).
3. Crispin Gardiner, Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences (Springer Series in Synergetics).