Математика

За отсутствие пояснений в решении может сниматься от 0,5 до 1 балла.

Задача №1:

a)

$ax + 4 - 2a = y$

$a(x-2) + 4 = y$ => при $x = 2$ y не зависит от параметра a.

Значит, это множество прямых, проходящих через (2; 4)

Критерии:

1. Указано, что прямые проходят через одну точку – 0,5 балла
2. Указана точка пересечения прямых – 0,5 балла

b)

$x^2 + 2x - 4x + y^2 + 1 = y$

$(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ – окружность с центром в (1; 0,5) радиуса 0,5

Критерии:

1. Указан центр окружности – 0,5 балла
2. Указан радиус окружности – 0,5 балла

c)

$$\begin{cases} a(x-2) + 4 = y \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Пересечение в одной точке означает единственное решение системы. Подставив y во второе мы получаем квадратное уравнение для x, значит для единственности достаточно, чтобы D = 0. (Для удобства второе уравнение умножим на 4)

$$D = -3a^2 + 28a - 48 = 0 => a = \frac{14 \pm 2\sqrt{13}}{3}$$

Критерии:

1. Записано условие единственного решения – 1 балл
2. Получен верный ответ – 1 балл

Задача №2:

a)

Ясно, что наименьшая сумма получается если взять минимальные возможные суммы (арифметическая прогрессия от 1 до 100). Возьмем минимальную сумму 99 чисел, которая равна 4950. 4950 + 230 < 5120, значит 230 не может быть.

Критерии:

1. Записана наименьшая сумма и получен верный ответ – 1 балл

b)

Если 14 отсутствует, то суммируем числа от 1 до 13 и от 15 до 101 (наименьшая сумма без 14), получаем 5137, что больше чем 5120, значит 14 есть среди записанных чисел.

Критерии:

1. Записана наименьшая сумма без 14 и получен верный ответ – 1 балл

c)

Выпишем числа, которые делятся на 14:

14 28 42 56 70 84 98 112

Наименьшая сумма от 1 до 100 = 5050, эта сумма увеличивается при замене чисел, делящихся на 14, на 100, 101 и т.д. Ясно, что для минимальной суммы необходимо убирать числа кратные 14 и ближайшие к 100, 101 и т.д. Получается, что сумма меньше 5120 если чисел не менее 4. Ответ 4.

Критерии:

1. Записано условие минимальной суммы – 1 балл
2. Верно найдено минимальное количество чисел – 1 балл

Задача №3:

a)

$sin\,x + cos\,x = 2\sin^2 x + 2\sin^2(x + \frac{7\pi}{2})$

$sin\,x + cos\,x = 2\sin^2 x + 2\cos^2(x)$

$sin\,x + cos\,x = 2 \Rightarrow \sin x = \cos x = 1 \Rightarrow$ Решений нет

Критерии:

1. Верное решение и ответ – 1 балл

b)

$\sin 2x - \cos x = 0$

$(2\sin x - 1)\cos x = 0$

$\left[\begin{matrix}\cos x = 0\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \Rightarrow$ Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

Критерии:

1. Сделано верное разложение – 0,5 балла
2. Получены верные ответы – 0,5 балла

c)

$2 + \frac{\sin 2x}{2} - \sin x - \cos x = 0$

$3 + 1 + 2\sin x\cos x - 2\sin x - 2\cos x = 0$

$3 + (\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) = 0$

Сделаем замену $t = \sin x + \cos x$

$t^2 - 2t + 3 = 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ Нет корней

Критерии:

1. Сделано верное разложение – 0,5 балла
2. Показано, что корней нет – 0,5 балла

Задача №4:

Обозначим за S взятую в банке сумму, за X обозначим выплаты за месяц, тогда получаем уравнение:

$((1{,}3S - x)1{,}3 - x)1{,}3 - x = 0$

При этом $3x - S = 156060$

$$(\left(1{,}3S - \frac{156060 + s}{3}\right)1{,}3 - \frac{156060 + s}{3})1{,}3 - \frac{156060 + s}{3} = 0$$

$S\left(1{,}3^3 - \frac{1{,}3^2}{3} - \frac{1{,}3}{3} - \frac{1}{3}\right) = 156060(\frac{1{,}3^2}{3} + \frac{1{,}3}{3} + \frac{1}{3})$

$S = 239\,400$

Критерии:

1. Использована верная формула – 0,5 балла
2. Получен верный ответ – 0,5 балла